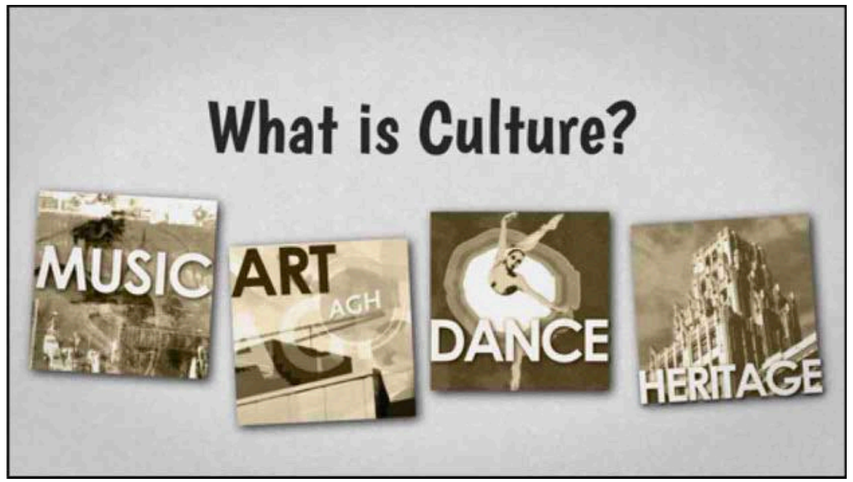
Les Miroirs d'Euclide

Pierre Coullet
pcoullet@mac.com
INPHINI, Université de la Côte d'Azur

Jaime San Martin
jsanmart@dim.uchile.cl
CMM, Universidad de Chile

Qu’est ce que la Culture ?

La culture englobe toutes les pratiques qui ne peuvent être attribuées à l'héritage génétique.



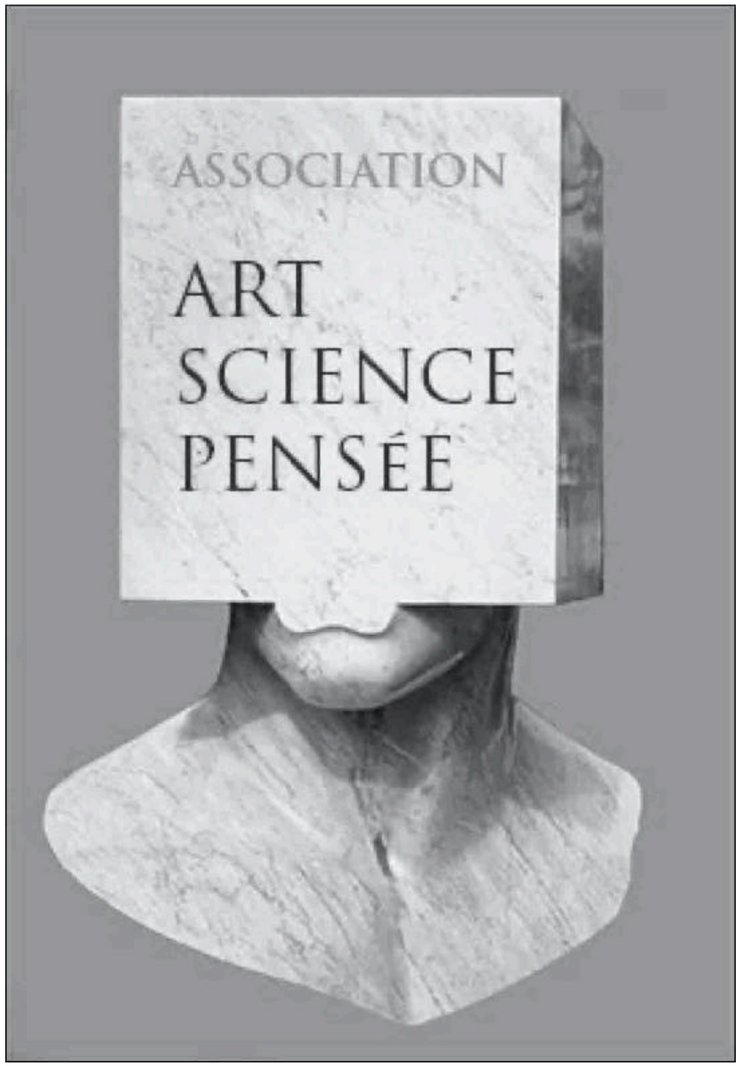




La culture hérite des innovations des générations précédentes.
La science est elle un élément de culture ?
On pourrait penser que non au regard des logos d'Institutions culturelles majeures !

Paul Charbit crée, il y a plus de 30 ans une manifestation singulière à Mouans-Sartoux dans les Alp
Maritimes associant Art et Science plaçant ainsi la Science dans le champ de la Culture.

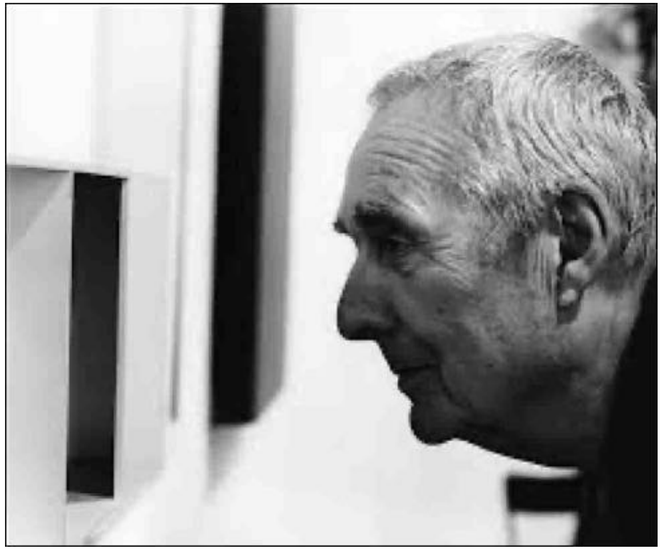




Un regard visionnaire de la relation entre Art et Science

Des rencontres exceptionnelles lors du colloque de Paul Charbit

Gottfried Honegger
Le maitre
de l'Art Concret
(1917, 2016)



Sacha Sosno
L'artiste qui aimait
les scientifiques
(1937, 2013)





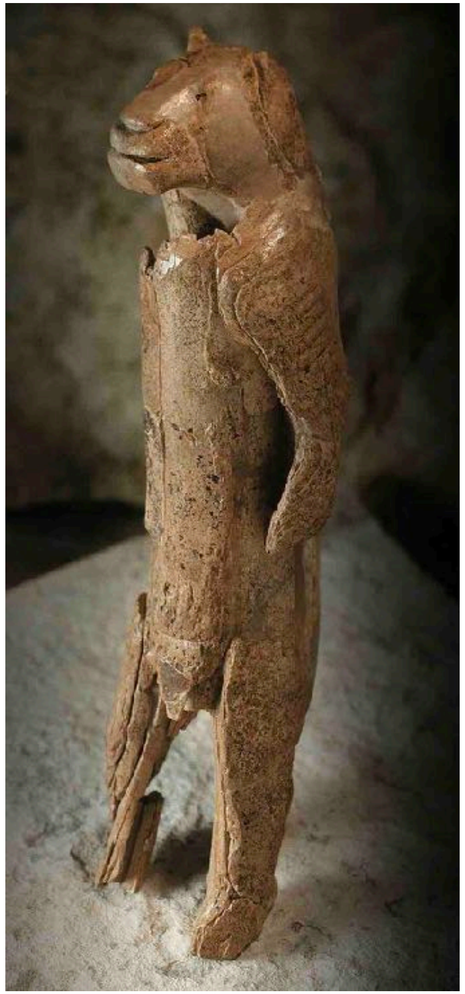
André Aschieri
Un homme politique visionnaire.

La rencontre entre un artiste singulier et un physicien

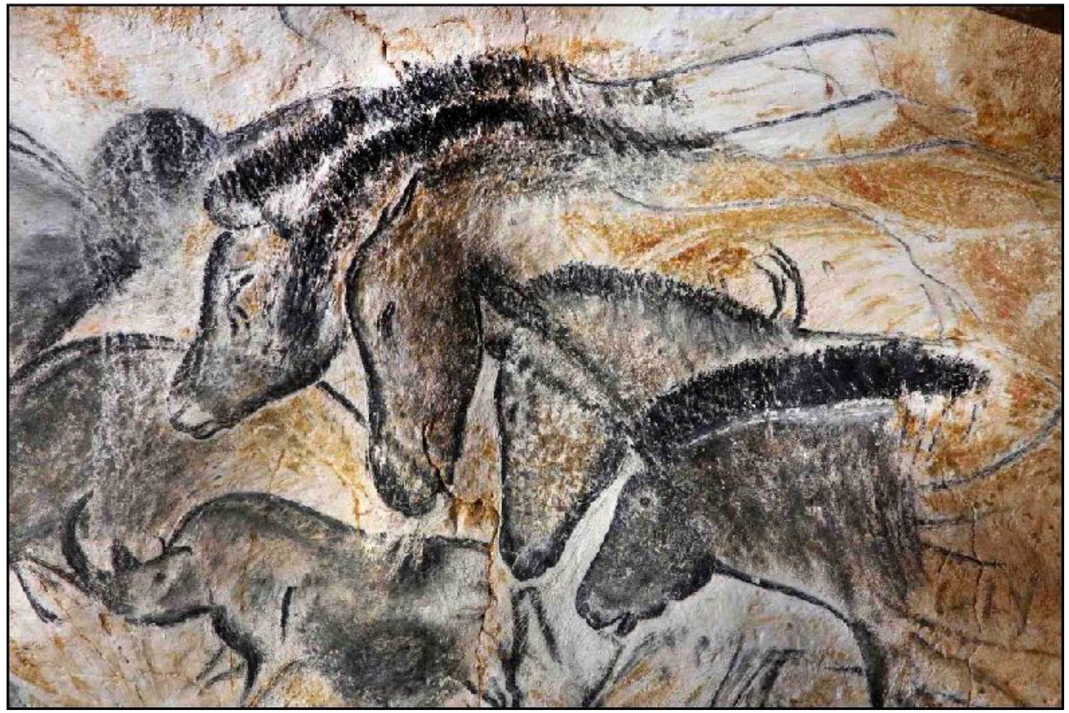


Edmond Vernassa
(1926, 2010)

Les Sapiens sont des animaux créatifs, Générateurs de Culture



L'homme Lion du Stadel
40,000 years



Les peintures de la grotte Chauvet
36,000

Bien avant l'apparition de l'écriture …

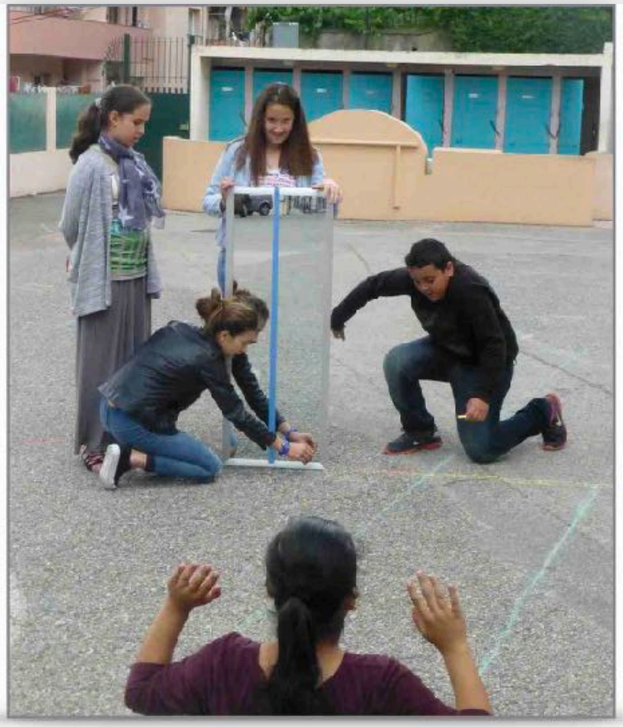
Des mécanismes de transmission de la culture



L’enseignement de masse et la révolution industrielle



Transmission de la culture dans le règne animal
http://ethologie.unige.ch/etho4.13/par.date/2013.11.18.htm



A la recherche du miroir parfait ..; dans une cours de récréation

Education, Imitation, Jeux …

L’école tue la créativité !



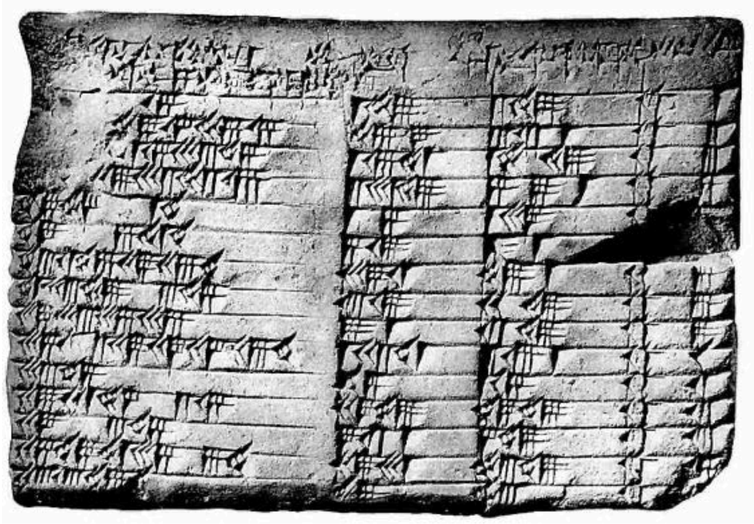
Sir Ken Robinson, TED 2006

Qu’est ce que la Science ?

Les Mathématiques

La naissance des mathématiques semble coïncider avec l'apparition de l'écriture. Toutes les grandes civilisations, de l'Hindus à la Mésopotamie en passant par l'Egypte ont développé indépendamment une culture mathématique. Issue d'une part de la modélisation des régularités que présentent certains phénomènes naturels comme par exemple le mouvement des étoiles dans la sphère céleste et d'autre part de problèmes concrets comme par exemple le calcul des surfaces ou encore la répartition des héritages, les mathématiques apparaissent comme un élément de culture assez singulier par son caractère universel.

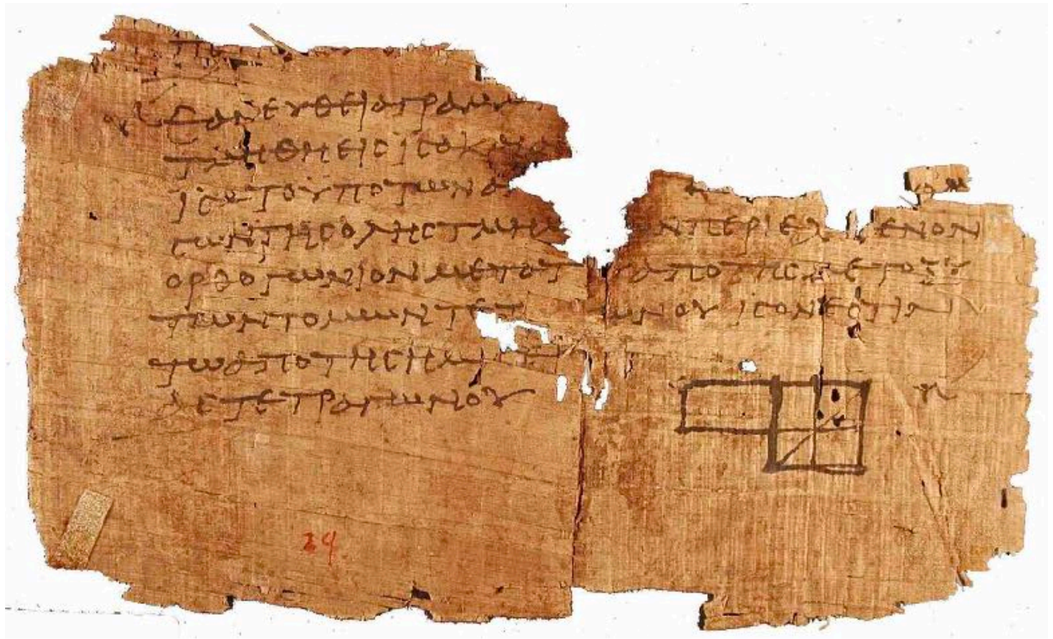






Des mathématiques utilitaires aux mathématiques abstraites

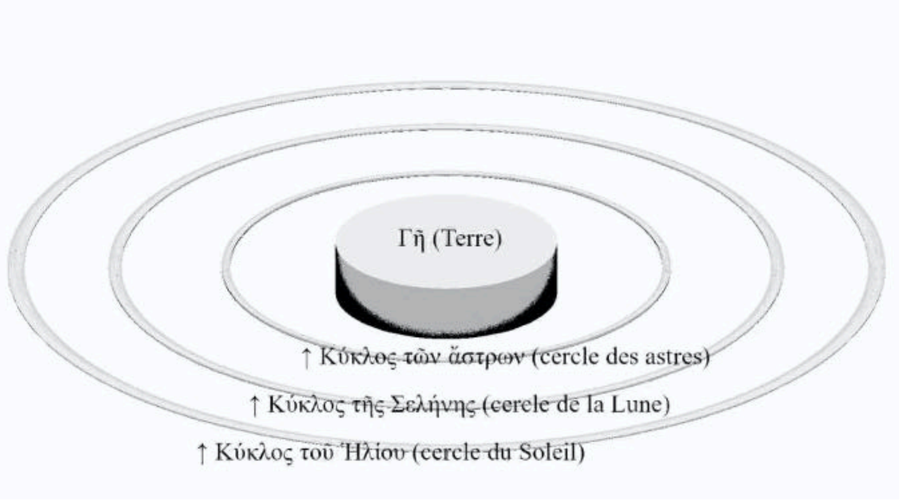
C’est en Grèce, au VII ème siècle avant notre ère, que les mathématiques ont acquis leur caractère abstrait quasi définitif. Leur développement spectaculaire se trouve résumé dans les « éléments d’Euclide » qui date du III ème siècle avant notre ère. Les "éléments" sont le plus ancien écrit de mathématiques qui nous soit parvenu. Eudème de Rhodes, considéré comme le premier historien des sciences, élève d’Aristote nous a cependant laissé les pistes pour reconstituer l’histoire des mathématiques entre Thales (-620,-545) et Euclide (-300). Son histoire de la géométrie grecque ne nous est parvenu qu’au travers d’ouvrage plus tardif de Proclus philosophe néoplatonicien datant du IV ème siècle de notre ère. C’est l’une des grandes sources de l’histoire des mathématiques pendant la période Hellénique.



Fragment des « Elementts » contemporain à Euclide

Une Philosophie de la nature

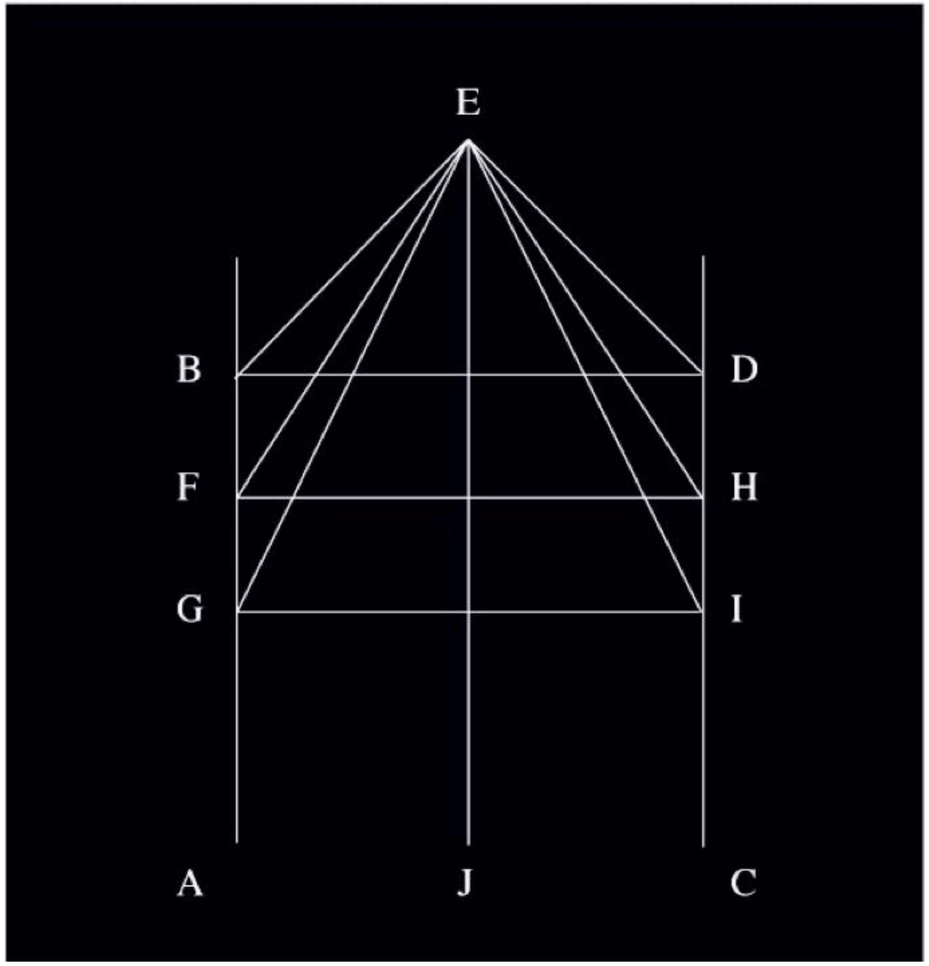
La physique, que l'on doit comprendre comme la tentative de démystifier les phénomènes naturels nait à Milet avec trois philosophes : Thalès, Anaximandre et Anaximène. Ils développèrent une véritable philosophie de la nature en substituant des arguments rationnels aux explications mythologiques. Anaximandre (-610,-546), élève et successeur de Thales à l'Ecole de Milet a poussé cette démarche le plus loin. Il aurait été le premier à consigner ses études dans un ouvrage qui ne nous ait malheureusement pas parvenu. C'est à Aristote et à ses commentateurs que l'on doit des éléments de la pensée d'Anaximandre.



La cosmologie d'Anaximandre

La Philosophie de la nature devient mathématique avec Euclide

C’est de la rencontre de cette philosophie de la nature avec les mathématiques qu’est née la physique moderne. Le premier ouvrage qui nous soit parvenu témoignant de cette rencontre est due à Euclide. Dans un ouvrage dédié à "l’optique" qui lui est attribué, il décrit la perpective d’un point de vue géométrique.



Les barreaux d’une échelle vue d’un observateur placé en E apparaissent d’autant plus petit qu’ils sont éloignés

Le livre de la nature est il écrit dans le language des mathématiques ?

Cette méthode puissante d'analyse des phénomènes naturels n'a cessé d'interroger les savants au cours des siècles. Ainsi Galilée écrivait il : "Le livre de la Nature est écrit en langage mathématique ». Einstein, lui, s'interrogeait : "Comment se fait-il que les mathématiques, qui sont un produit de la pensée humaine et sont indépendantes de toute expérience, puissent s'adapter d'une façon si admirable aux objets de la réalité ? ». Puis Richard Feymann: "La physique est mathématique non parce que nous en savons beaucoup sur le monde physique mais au contraire parce que nous en savons fort peu. Seules les propriétés mathématiques du monde nous sont accessibles et la puissance de la physique vient précisément de ce qu'elle limite ses ambitions aux seules questions mathématisables".





Expérimentations et mathématiques

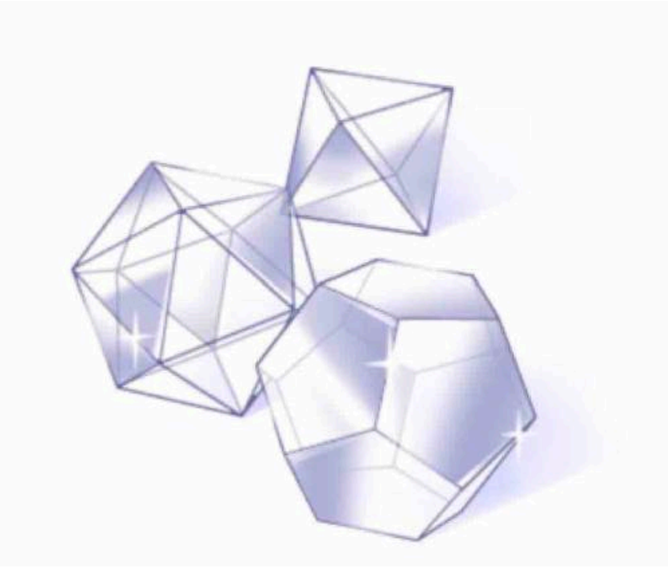
Les progrès spectaculaires de la Physique sont d'une part dues à l'efficacité de la modélisation mathématique mais également au développement de la méthode expérimentale.Archimède l'a très probablement utilisé, notamment pour vérifier la loi de la poussée des corps immergés. Au I er siècle de notre ère Ptolémée a établi les lois de la réfaction à l'aide d'un dispositif expérimental. Ibn al Haytham au XI ème siècle a développé une série d'expériences cruciales afin d'établir les lois de l'optique. Il apparait comme le fondateur de la méthode expérimentale. La méthode expérimentale est d'une part l'extension de l'observation pure du monde réel. A l'origine utilisant des dispositifs rudimentaires, cet aspect de la méthode expérimentale a acquis ses lettres de noblesse au XVII ème siècle, avec l'utilisation d'instruments plus sophistiqués comme par exemple la lunette avec Galilée et le microscope avec Robert Hooke. Mais l'expérimentation permet surtout de rapprocher un phénomène naturel de sa modélisation mathématique en le contraignant fortement.



Galilée fait une demonstration de la chute des corps sur un plan incliné à Don Giovanni de Medici, sur la droite de la peinture, qui semble fort peu intéressé …. Le peintre, Giuseppe Bezzuolli (1839), a oublié la présence de clochettes disposées à des distances proportionnelles au nombres impairs, élément essentiel de la démonstration, manifestant ainsi son absence de culture scientifique !

Les Modèles Mathématiques de la Physique

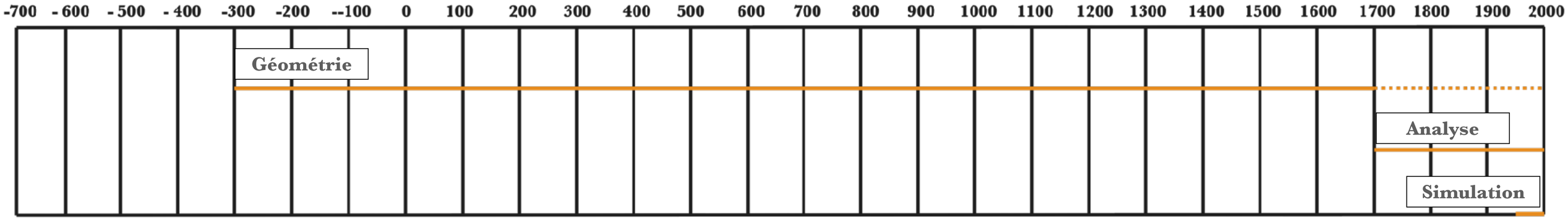
La physique a suivi le développement des mathématiques. Essentiellement géométrique, pendant prés de 20 siècles d'Euclide à Newton, elle utilise largement le calcul différentiel à partir du XVIII ème siècle, ce qui lui permet d'aborder des problèmes plus complexes comme par exemple celui de la dynamique des fluides. La physique devient "Probabiliste" au milieu du XIX ème siècle avec l'avènement de la physique statistique qui permet de relier le comportement microscopique des atomes aux propriétés macroscopiques de la matière. Au début du XX ème siècle, la physique quantique utilise le formalisme abstrait des opérateurs. Simultanément, Einstein développe une théorie de la gravitation sur la base de la géométrie différentielle non-euclidienne. Enfin, depuis la fin de la seconde guerre mondiale, après les premiers calculs utilisés pour la fabrication de la bombe atomique, puis la course aux armements pendant la guerre froide, la simulation numérique s'est largement imposé dans la pratique des physiciens. L'intelligence artificielle a son tour pourrait bien quand a elle s'avérer être un outil d'analyse particulièrement efficace du monde réel et de sa complexité.



Trois des cinq solides Platoniciens

La grande oblitération

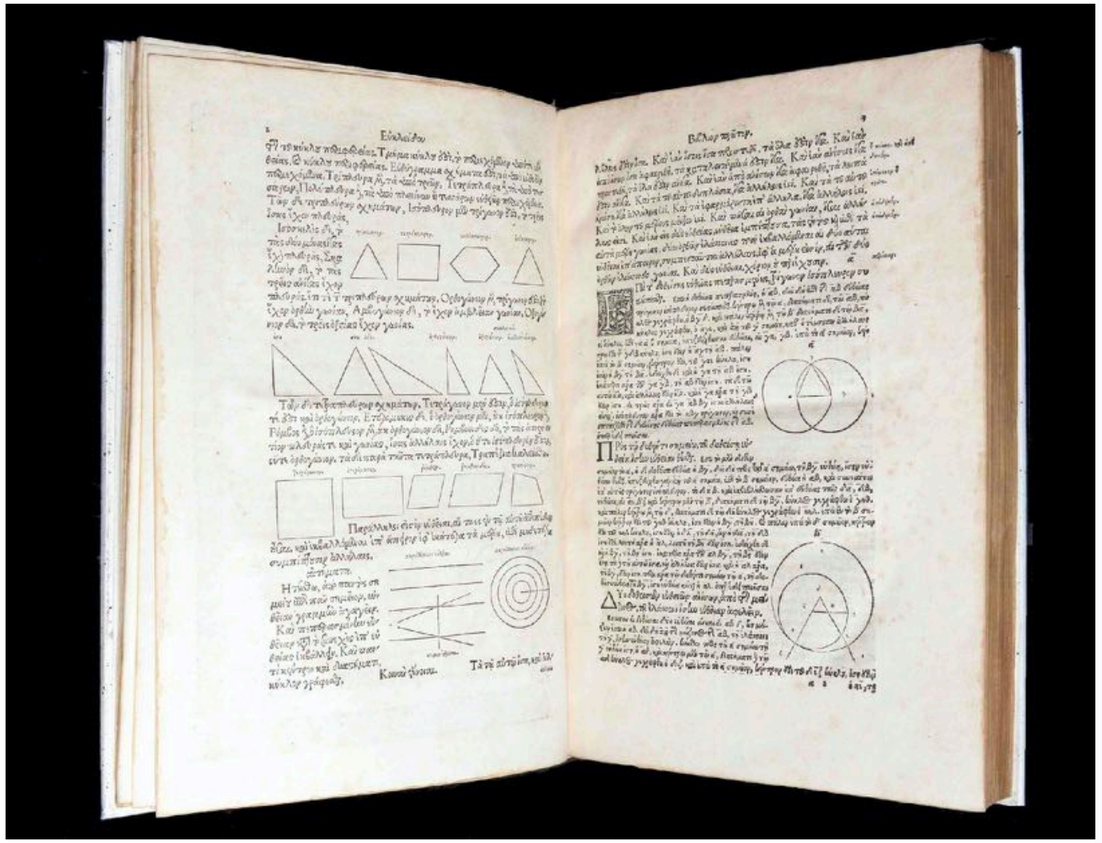
20 siècles « Géométriques » oubliés, récrits et enseignés en terme de calcul différentiel et intégral (analyse), rendant leur transmission difficile voire impossible avant l'enseignement universitaire



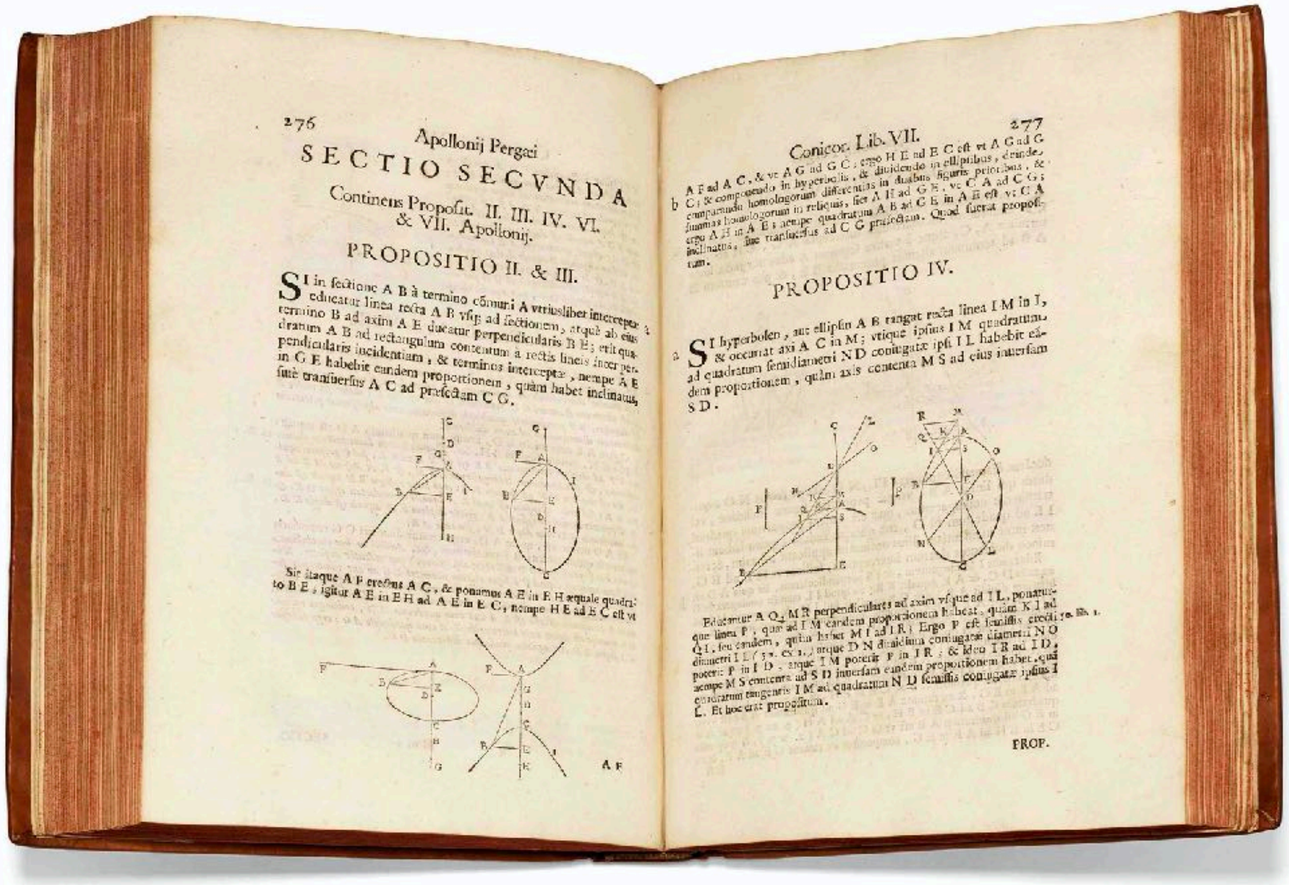
20 siècles « Géométriques » : Equilibre, Lumière et Mouvement

De -300 (Euclide) à 1700 (Newton), les lois de la physique ont été décrite exclusivement au moyen de la géométrie Euclidienne (géométrie élémentaire) et de la géométrie d'Apollonius (géométrie des courbes coniques que sont l'ellipse, la parabole et l'hyperbole), toutes deux datant du troisième siècle avant notre ère.

Vingts siècles de physique s'appuyant sur deux monuments de la science géométrique ….



« Les Eléments » d'Euclide, -300



« Les Coniques » d'Apollonius, -220

… dont l'enseignement à progressivement disparu depuis le milieu du XIX ème siècle

Objectifs: Re-écrire la physique élémentaire (Equilibre, Lumière et Mouvement)
dans sa langue géométrique originale.

Il s'agit de :

(1) Redonner le goût pour la géométrie
(2) Enseigner la Physique élémentaire au niveau des collèges et des Lycées
(3) Développer une culture scientifique qui s'appuie sur l'histoire

Nous l'illustrons par l'étude de deux problèmes, celui de l'Héliostat et celui du miroir « ardent »

Nous montrons en parallèle l'analyse moderne de ces problèmes telle qu'elle est faite à l'université et celle qui retrouve ses racines géométriques. Cette dernière a été expérimentée avec succès dans des collèges, avec des élèves de onze à douze ans.

L’Héliostat

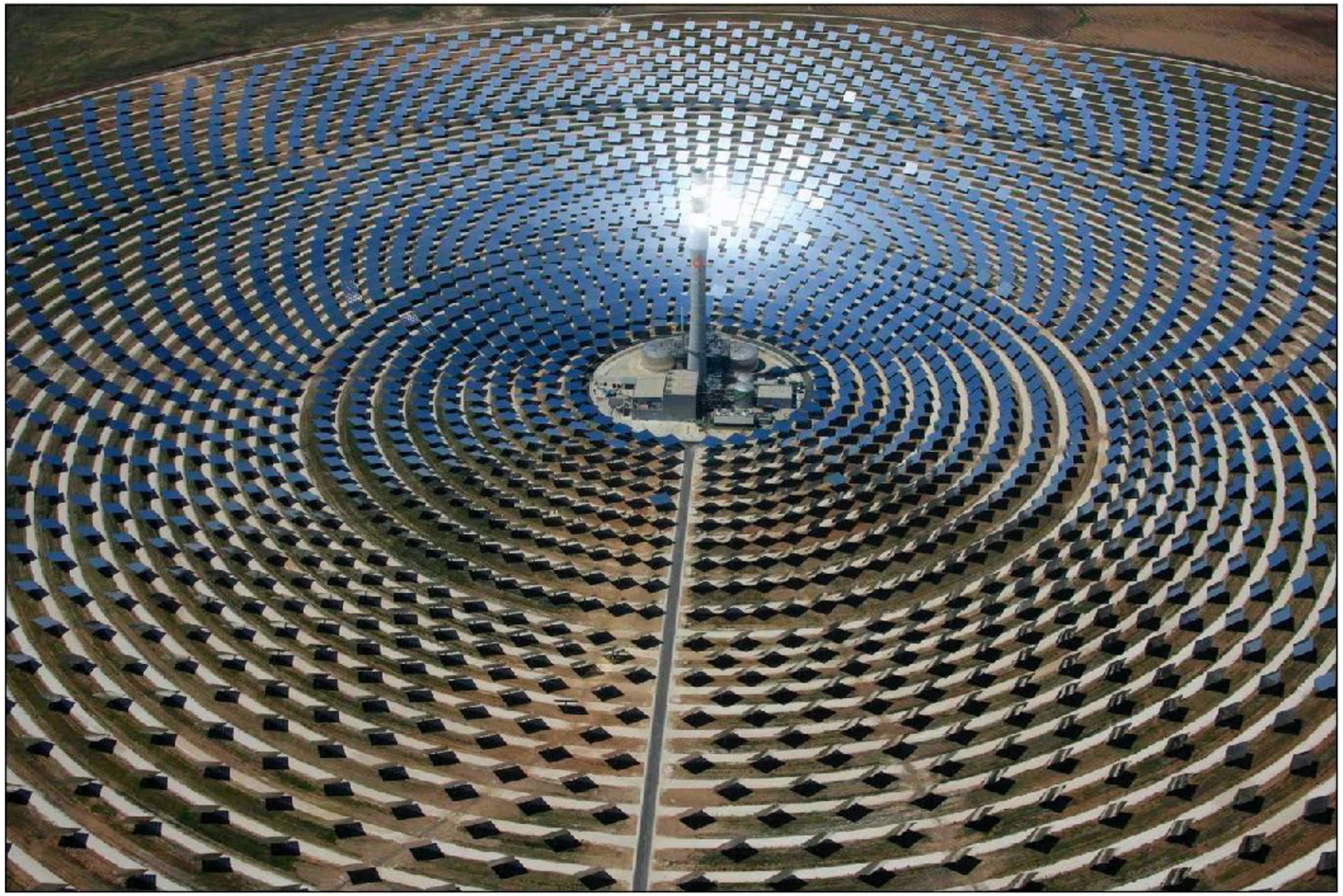
L’Héliostat est un dispositif servant à diriger les rayons du soleil dans une direction déterminée. Utilisé semble-t-il depuis l’antiquité égyptienne pour éclairer des salles à l’intérieur des pyramides, ce dispositif sert aujourd’hui à construire des fours solaires et même éclairer des tunnels d’autoroutes, comme celle qui relie Savone à Cuneo en Italie.



Un mécanisme d’horlogerie permet de rediriger les rayons solaires dans une direction fixe. Silbermann (1806-1865)

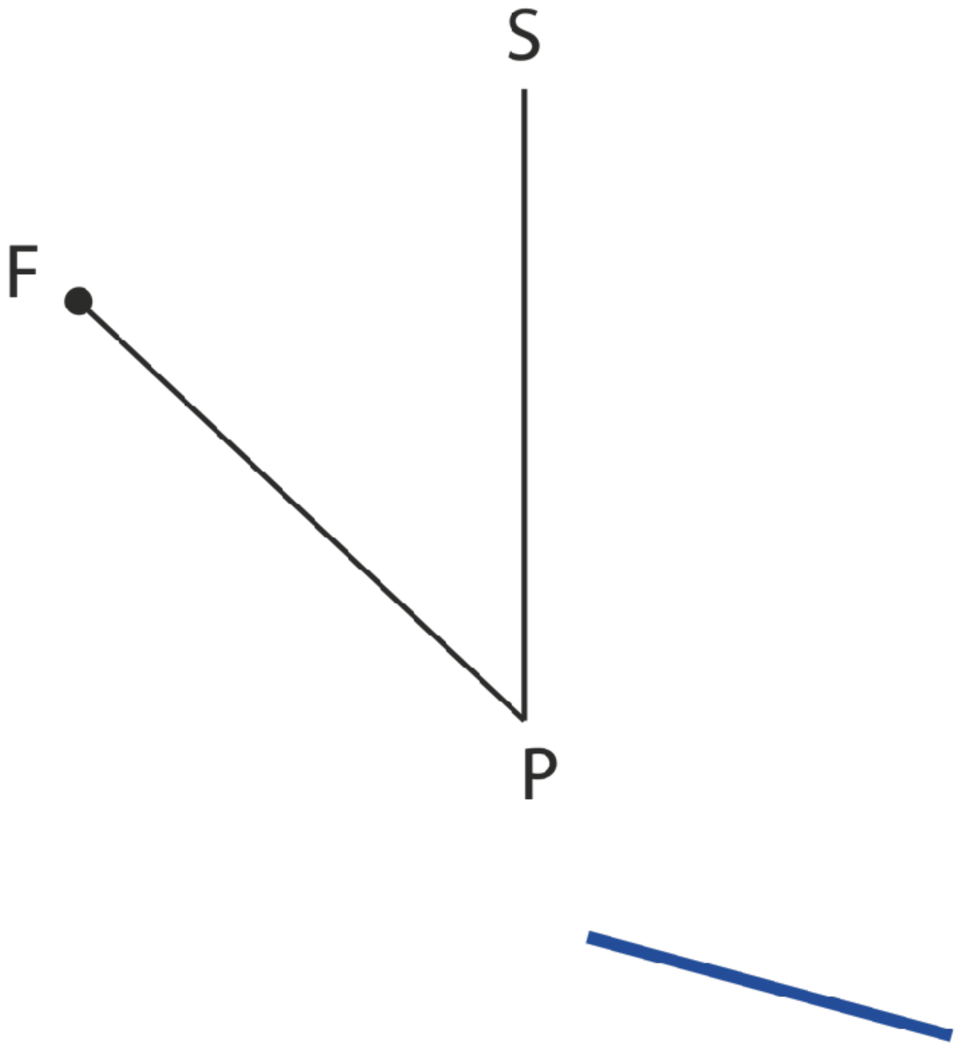
Champs d’Héliostats





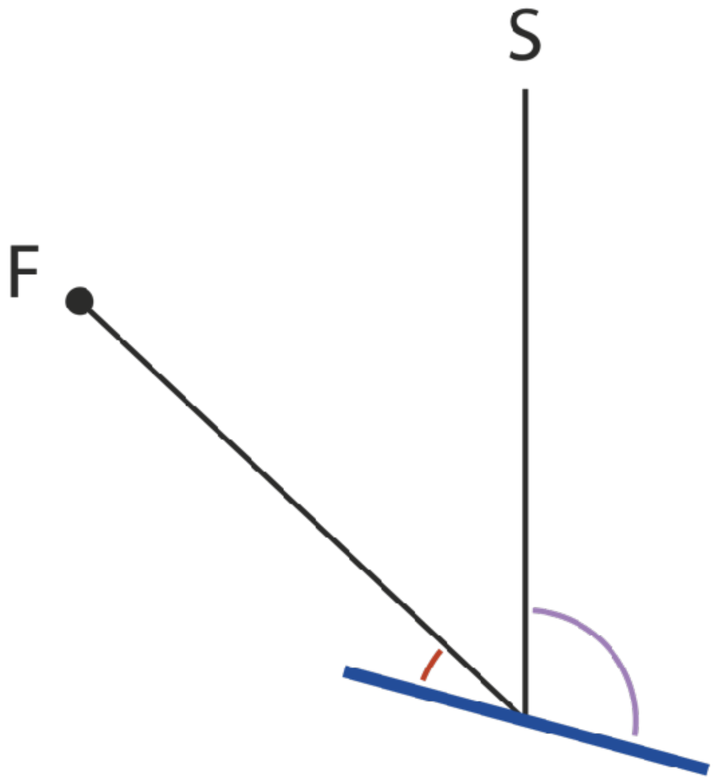
On cherche l'orientation d'un miroir de façon à ce qu'un rayon SP provenant du soleil soit réfléchi en F. Ce problème peut être ramené à deux dimensions. Le plan de la figure est celui engendré par les deux lignes (PS et PF). Le plan du miroir doit alors être choisi orthogonal au plan de la figure. C'est l'une des lois fondamentale de l'optique, établi par Ptolémée au II ème siècle de notre ère. Le miroir apparait comme une ligne dans ce plan.

La question est alors de savoir comment orienter un miroir placé en P de façon à réaliser cette « condition de réflexion ».

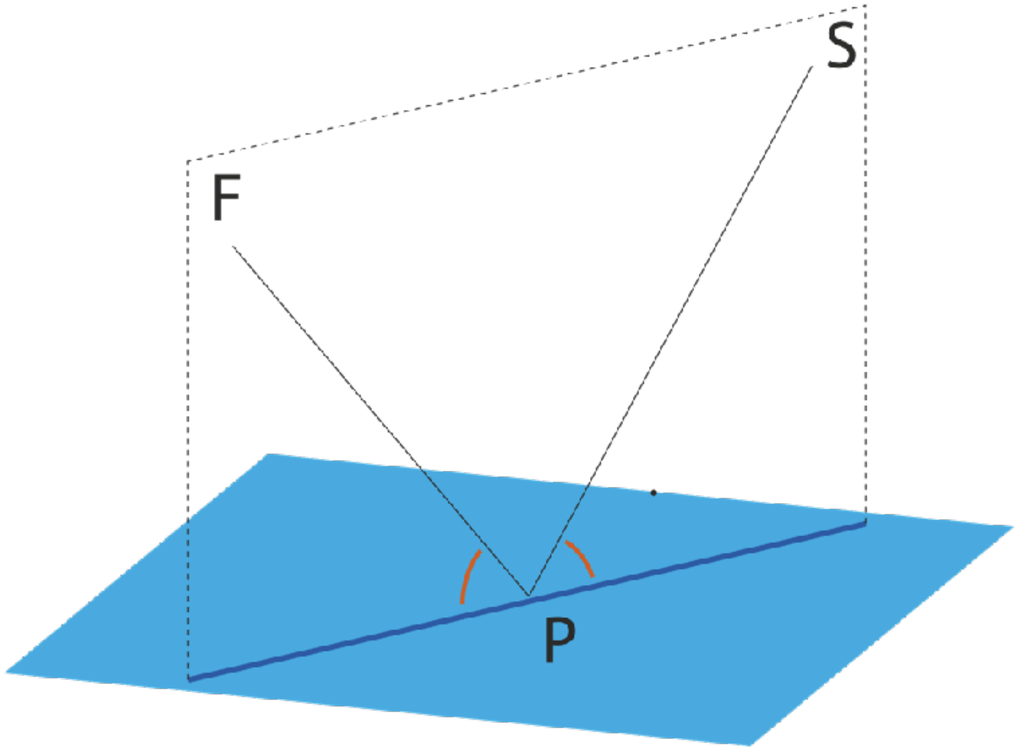


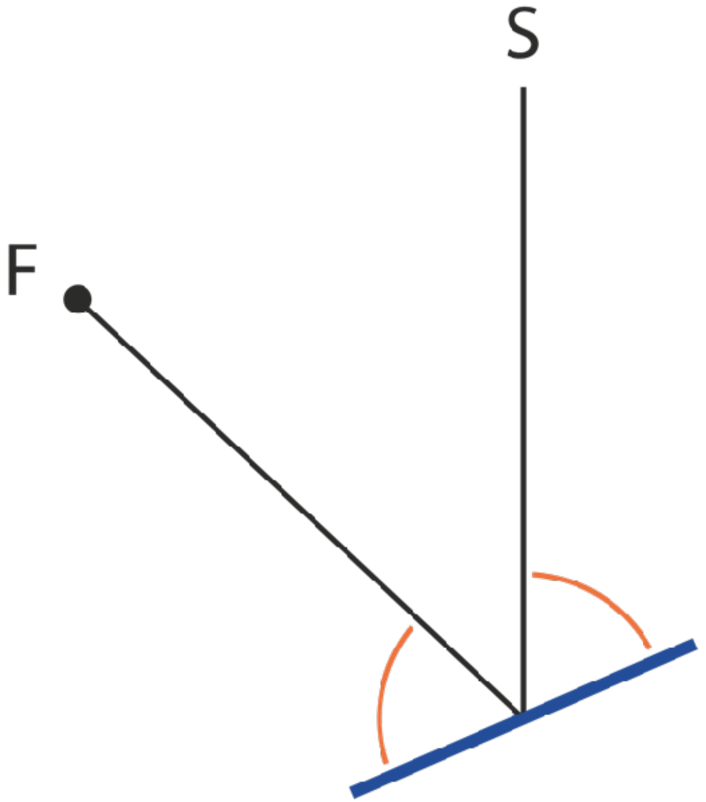
La loi de la réflexion de la lumière est sans doute la première loi de la nature connue des anciens. Elle impose l'égalité des angles de rayons incidents et réfléchi avec le plan du miroir. On la trouve implicitement dans un texte de Platon et surtout chez Aristote. Il est probable qu'elle ait été connue avant ces auteurs.

L'orientation du miroir telle qu'elle apparait sur la figure ne permet donc pas de réaliser la condition de réflexion d'un rayon SP vers F.



La figure à droite montre la configuration du miroir qui réalise la « condition de réflexion » en F. La figure ci-dessous replace le miroir dans l'espace.



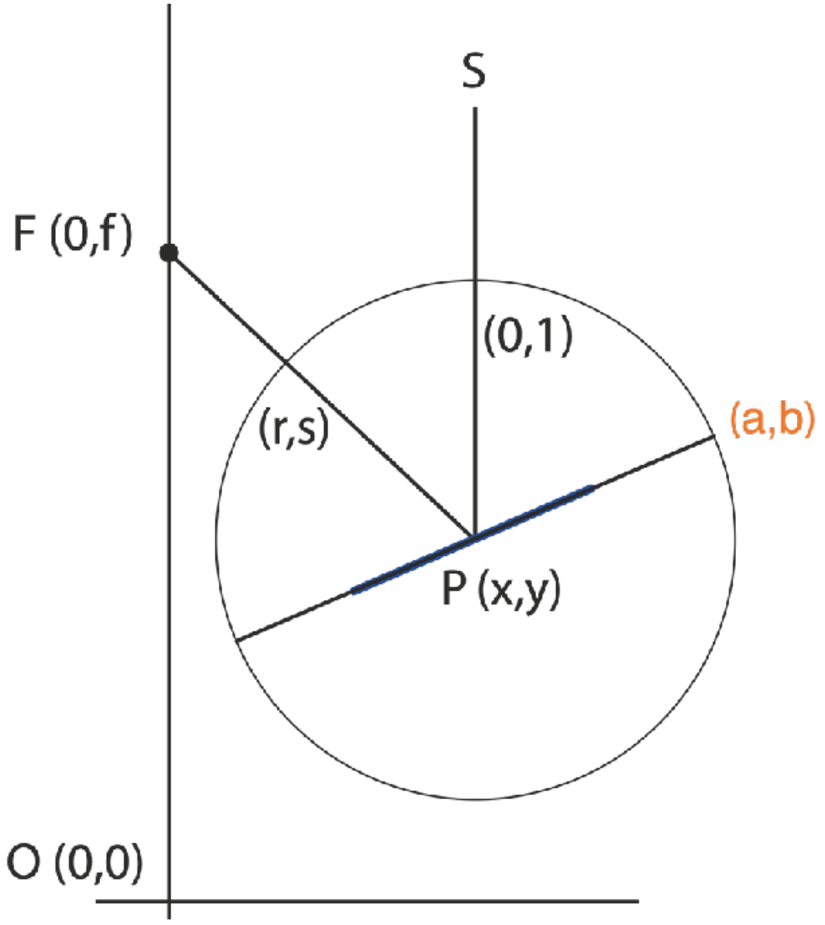


La configuration en deux dimensions peut être réalisée expérimentalement en utilisant une source de lumière artificielle rasant la surface. L'expérience est décrite dans la suite de cette présentation.

Calcul de l'angle tel qu'il est fait en première année de l'université en utilisant les méthodes de la géométrie analytique de Descartes !

$$r = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + (f-y)^2}}$$

$$s = \frac{f-y}{\sqrt{x^2 + (f-y)^2}}$$



$$(r,s).(-a,-b) = (0,1).(a,b)$$

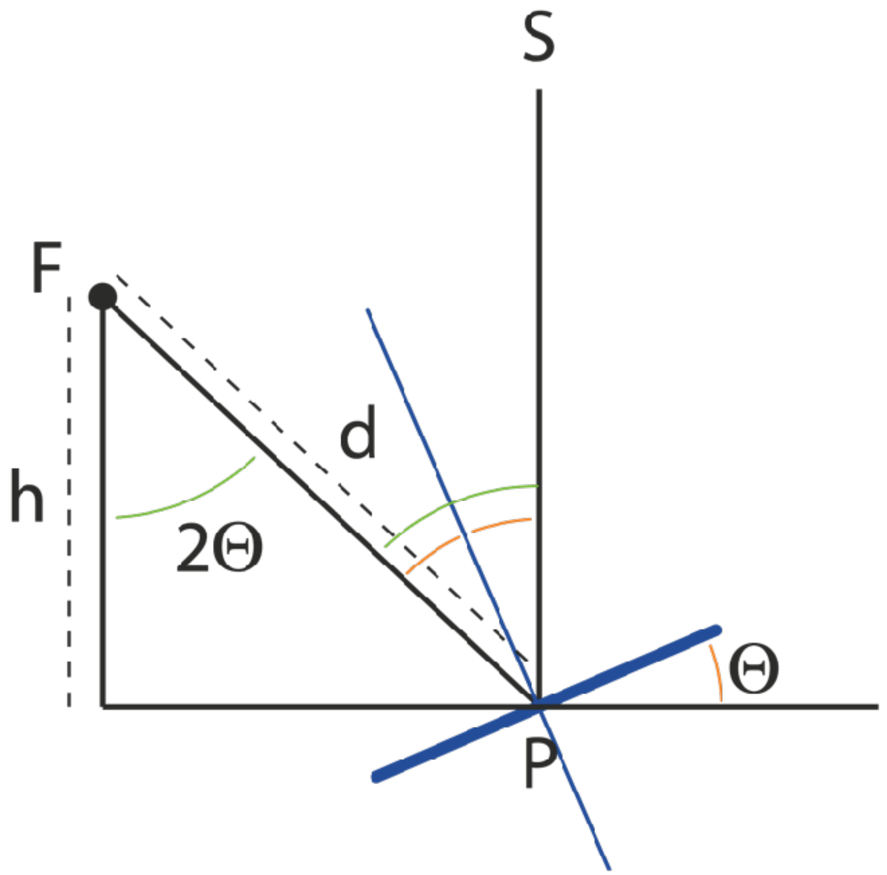
$$-ra - sb = b$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a = \frac{f-y+\sqrt{x^2+(f-y)^2}}{\sqrt{2}x}\sqrt{1+\frac{f-y}{\sqrt{x^2+(f-y)^2}}}$$

$$b = \frac{\sqrt{1+\frac{f-y}{\sqrt{x^2+(f-y)^2}}}}{\sqrt{2}}$$

Une méthode plus élégante utilisant la trigonométrie

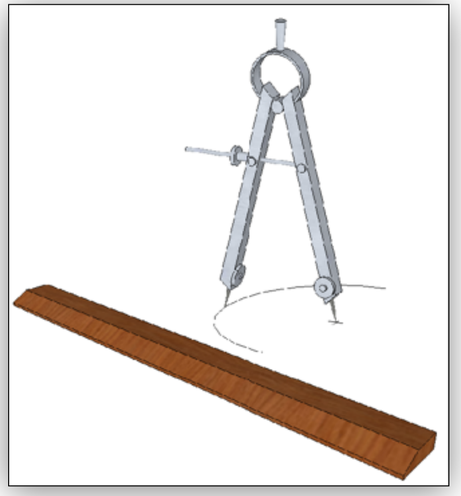


$$\cos 2\Theta = \frac{h}{d}$$

$$\cos 2\Theta = 2\cos^2\Theta - 1$$

$$\cos\Theta = \frac{\sqrt{1+\frac{h}{d}}}{\sqrt{2}}$$

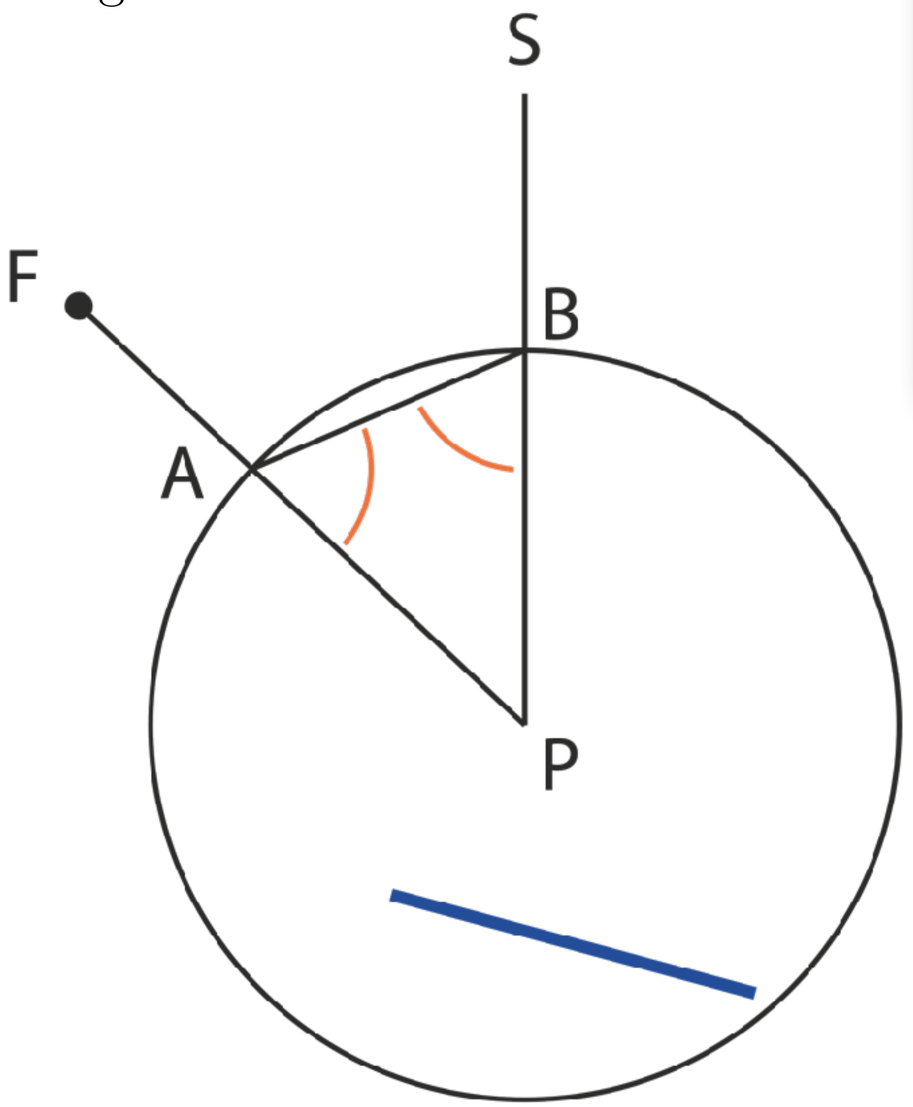
La méthode Euclidienne, au « compas et à la règle »



On trace le cercle de centre P, de rayon PA<PF. On a PA=PB (Euclide, Livre I , Définition XV). A et B sont respectivement les intersection du cercle avec les rayons réfléchi et incident.

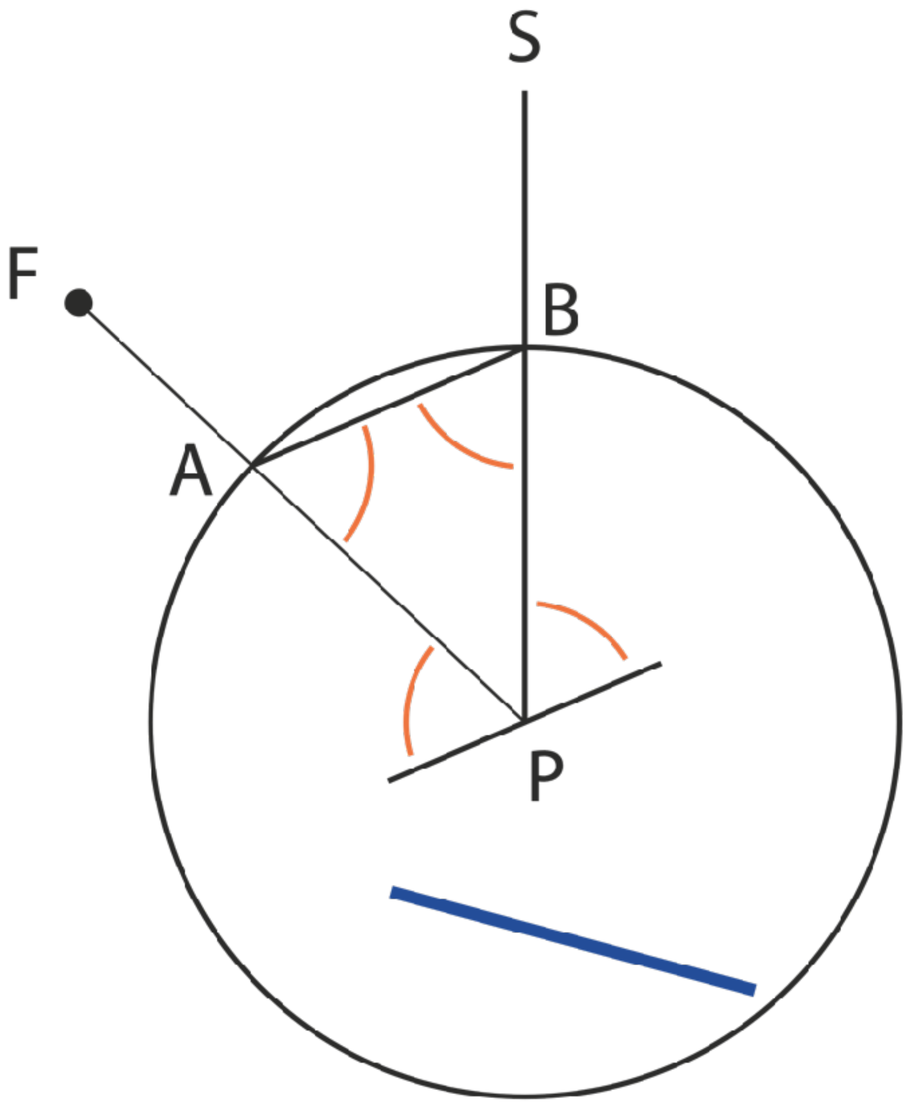
Le triangle APB est isocèle ((Euclide, Livre I, Définition XXV).

Les angles à la bases sont égaux (Euclide, Livre I, Proposition V, Théorème).



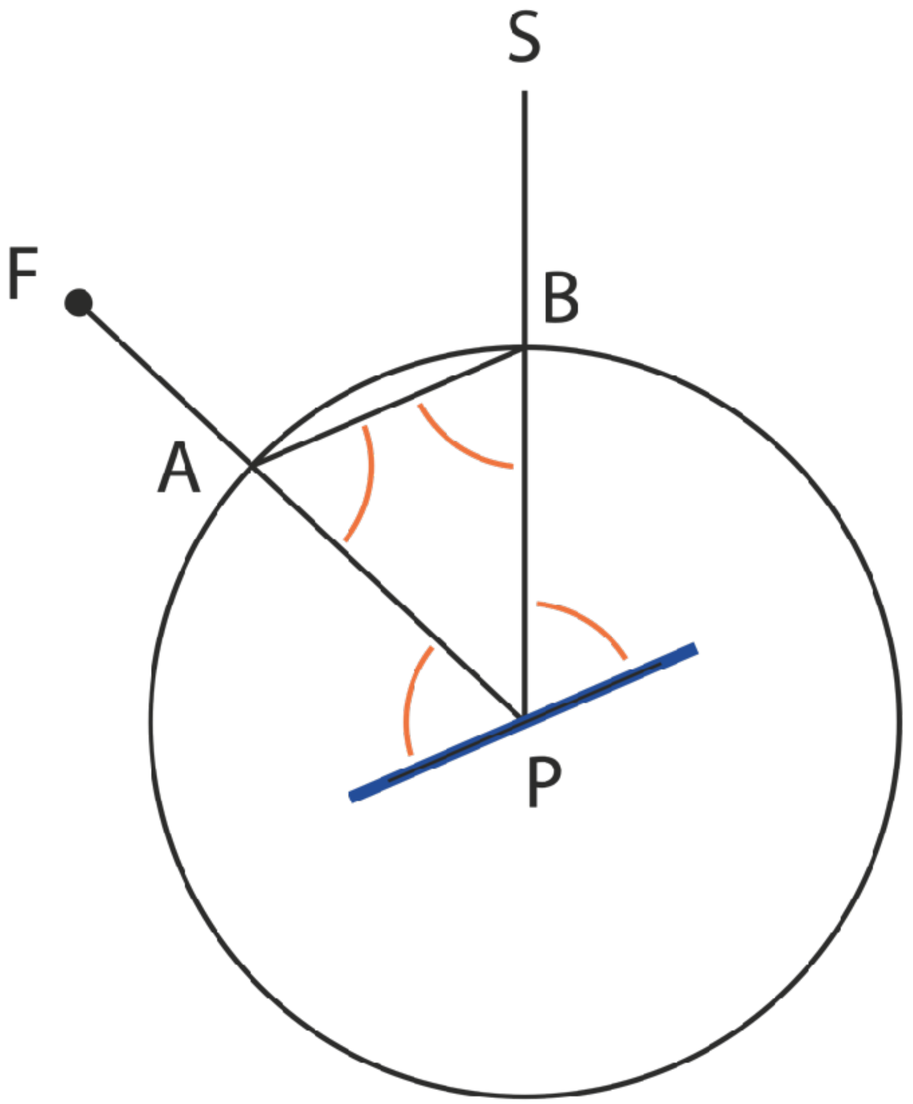
On trace la parallèle à AB passant par P (Euclide, Livre I, Proposition XXXI, Problème).

Les angles indiqués en rouge sur la figure sont égaux (Euclide, Livre I, Proposition XXIX, Théorème).



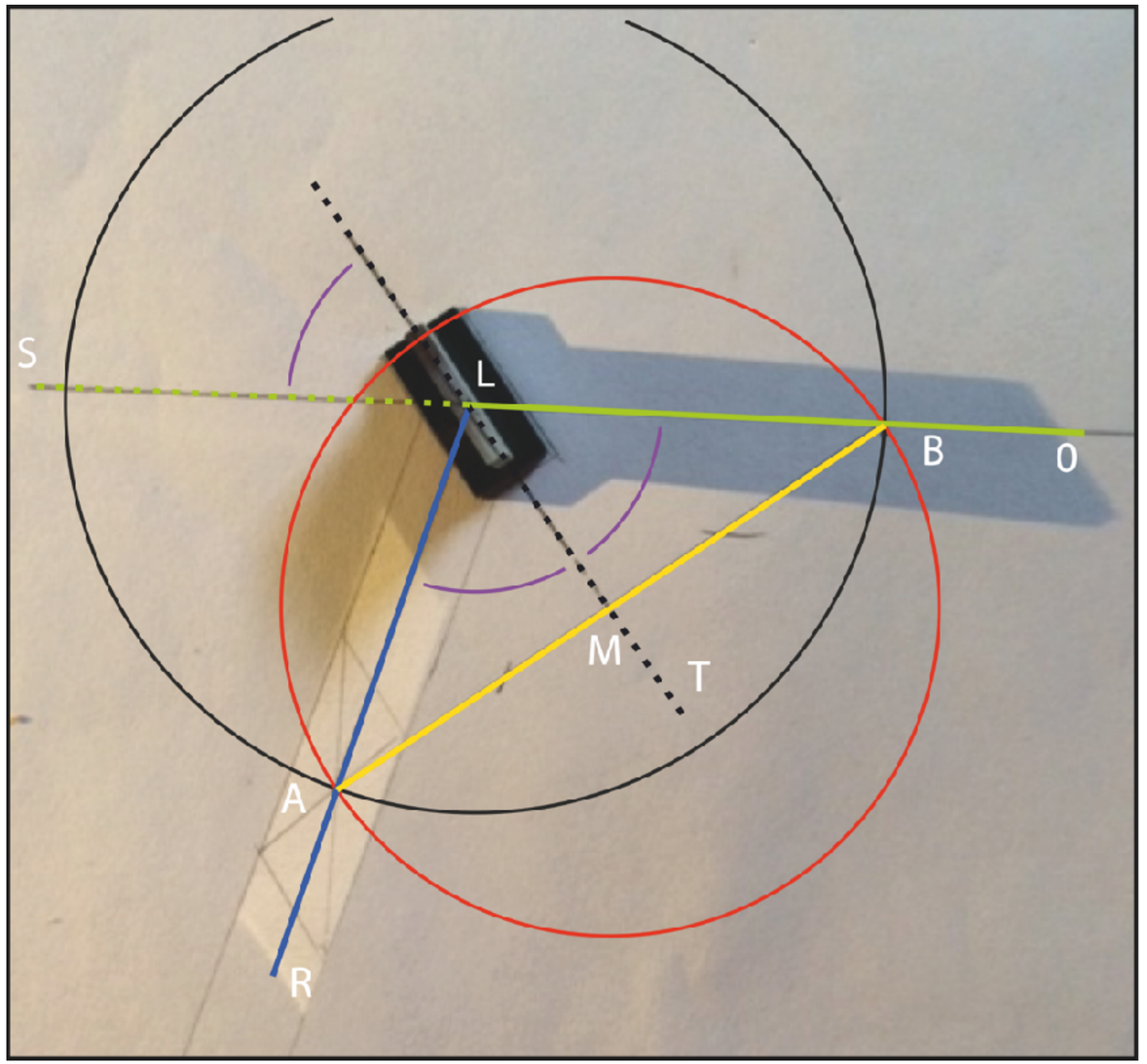
Le miroir qui réalise la condition de réflexion doit donc être placé sur la parallèle à AB passant par P.

La « condition de réflexion » est réalisée pour le point P, ici au milieu du miroir.



Vérification de la loi de la réflexion « au compas et à la règle »

Un miroir est éclairé par une source S en lumière rasante. Elle est placée à une distance assez grande du miroir. Sur l'ombre portée du miroir, on se donne un point O, au centre de sa partie transverse. La droite LO représente la direction du rayon incident passant par L. Le rayon réfléchi est directement visualisé par le segment LR, ou R est un point situé au centre de la partie transverse du faisceau réfléchi. On trace un cercle (en noir) de centre L. Il coupe LO en B et LR en A. On trace le segment AB. Le prolongement du miroir LT coupe le segment AB en M. On trace le cercle (en rouge) centré sur M de rayon MA. On vérifie qu'il passe par B. M est donc le milieu du segment AB. Comme le triangle ALB est isocèle, LM est alors la bissectrice de l'angle ALB. On en déduit ainsi l'égalité des angles en violet sur la figure, vérifiant ainsi la loi de la réflexion.



La Légende d'Archimède et les miroirs ardents

En -212, Marcellus assiège Syracuse. Sept siècles plus tard Anthémius de Tralles rapporte qu'Archimède réussi a repousser la flotte romaine au moyen de miroirs ! Ce fait n'est rapporté par aucun des historiens contemporains et postérieurs à l'evennement. Il sera démontré l'impossibilité théorique et technique de réaliser une tel exploit.

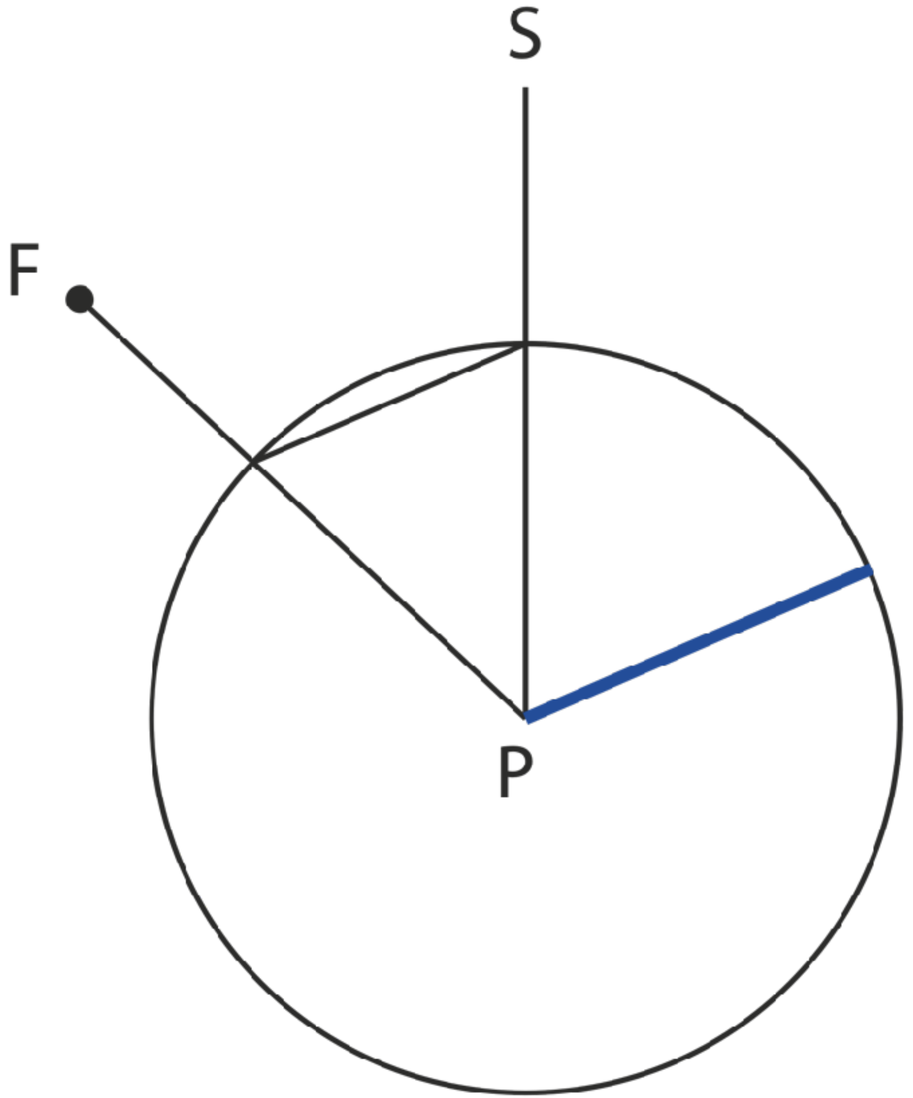


La recherche du miroir « ardent » qui permet de concentrer les rayons solaires en un point unique, son foyer remonte à l'époque d'Archimède. Sa forme parabolique a été découverte par Dioclés, contemporain d'Archimède.

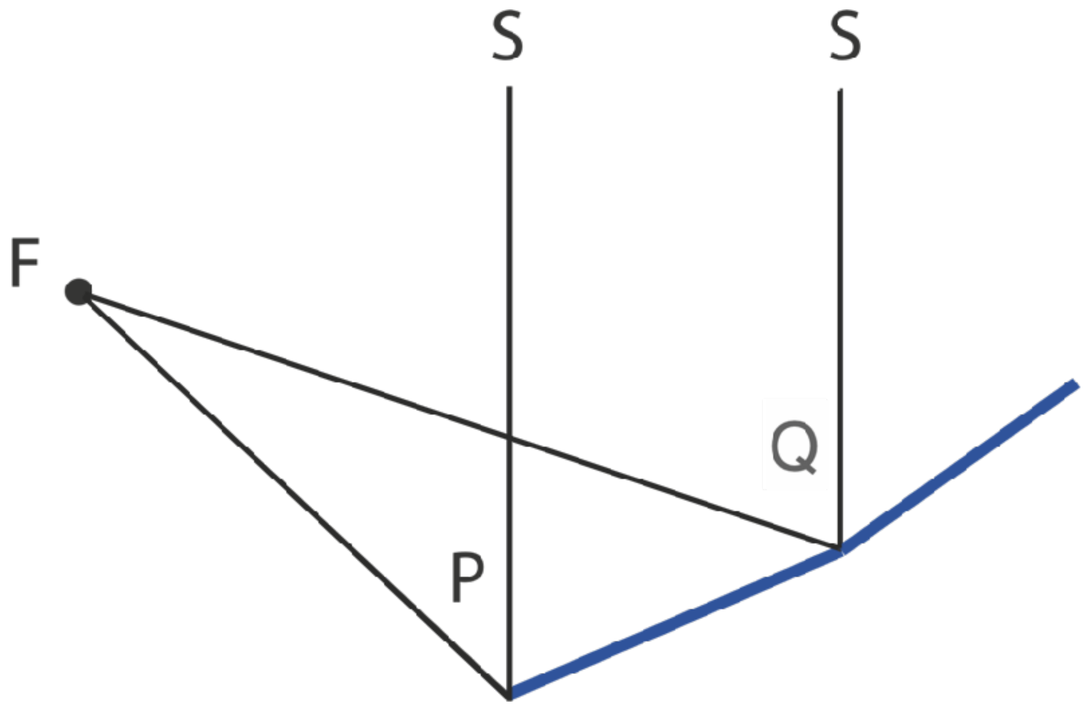
Recherche du « Miroir Ardent » qui rassemble tous les rayons solaires en son foyer F.

L'idée est simplement de placer des « petits » miroirs côte à côte de façon a diriger les rayons du soleil sur un point donné F.

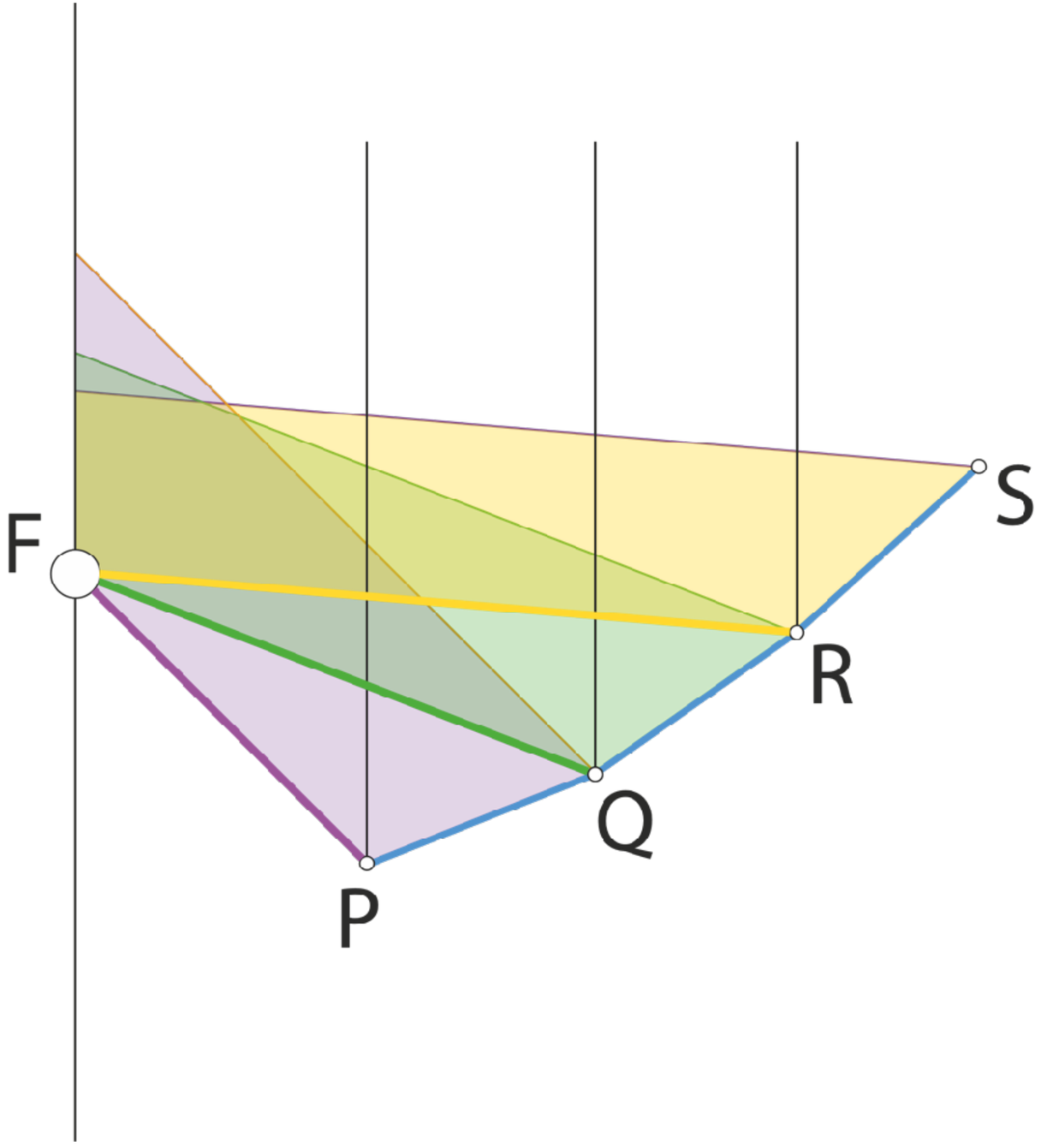
Le premier miroir est placé cette fois de sorte que son extrémité gauche réfléchisse le rayon SP en F.



Le second miroir est placé de sorte que son extrémité gauche Q, coïncide avec l'extrémité droite du premier miroir. Son orientation est défini par la même construction que celle du premier miroir.



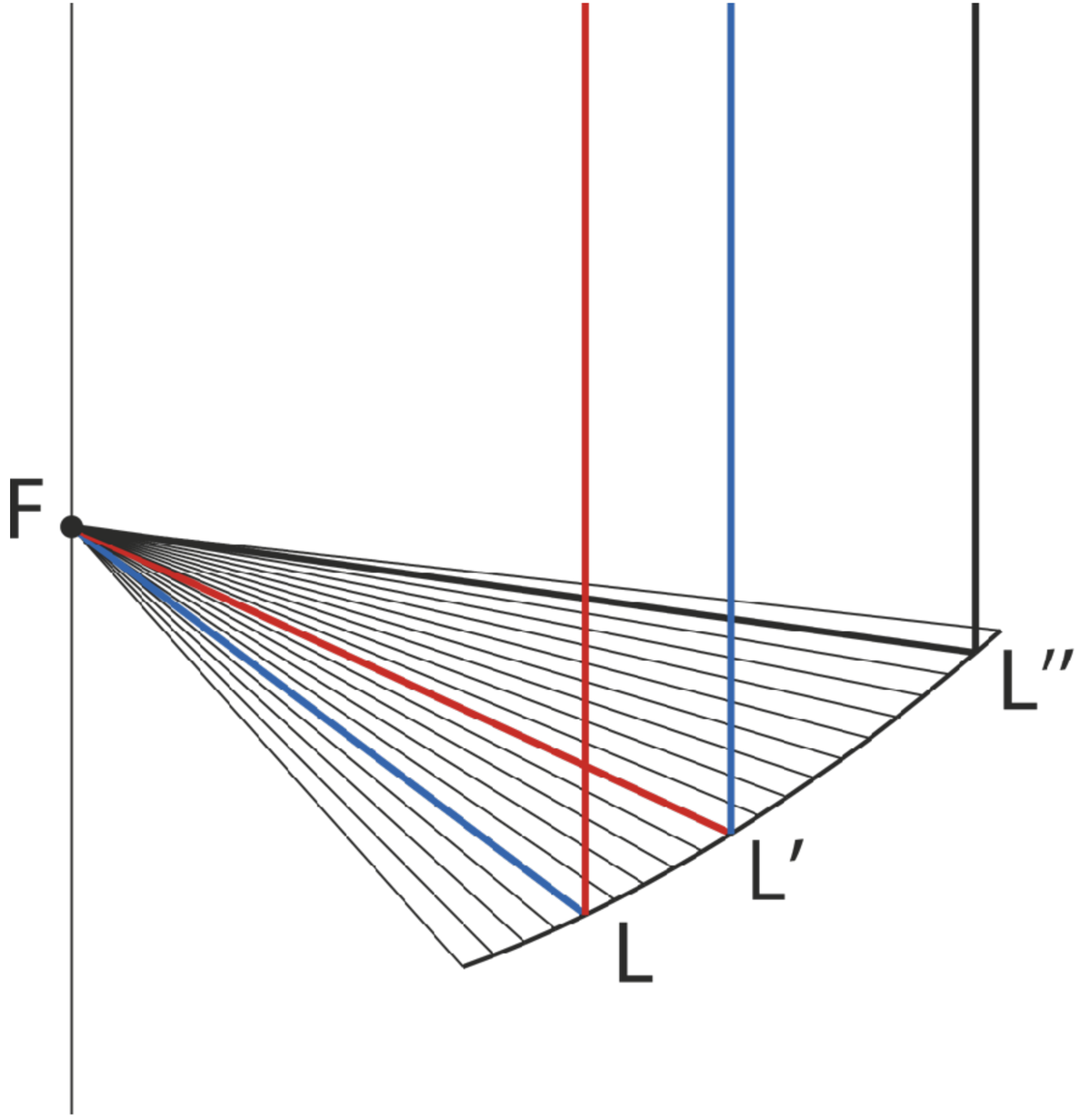
Les extrémités gauche P, Q, R des trois premiers miroirs réfléchissent les rayons solaires en F.



Construction des 20 premiers miroirs au « compas et à la règle ».

On explicité les rayons pour trois points L,L’ et L”.

La ligne brisée obtenue est l’approximation d’une courbe qui ressemble à un arc de parabole



Mais qu'est ce qu'une parabole ?

Au lycée c'est

$$y = x^2$$

A l'Université c'est

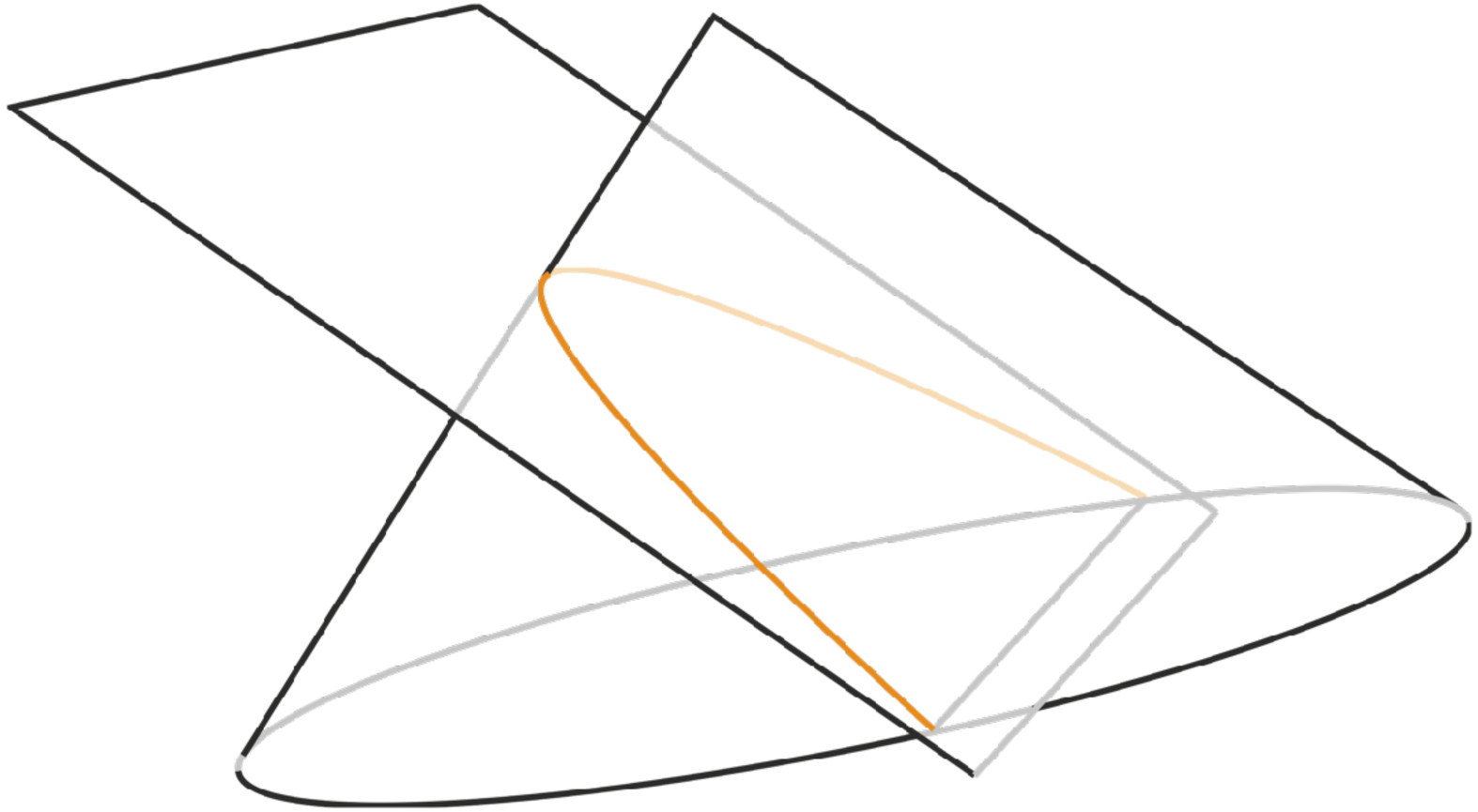
le cas particulier d'une
équation quadratique générale

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans le cas ou

$$b^2 - 4ac = 0$$

La définition historique de la parabole

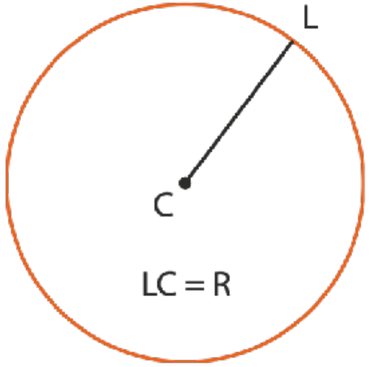


Intersection d’un cône « droit » et d’un plan parallèle à sa génératrice

Menechme, contemporain et ami d’Aristote, professeur de mathématique d’Alexandre le Grand

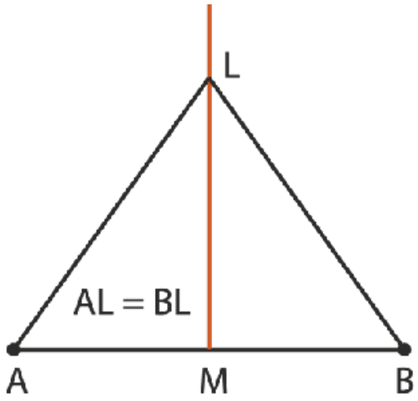
Trois « lieux » classiques de points équidistants ..

d'un point C



Le cercle

de deux points
A et B



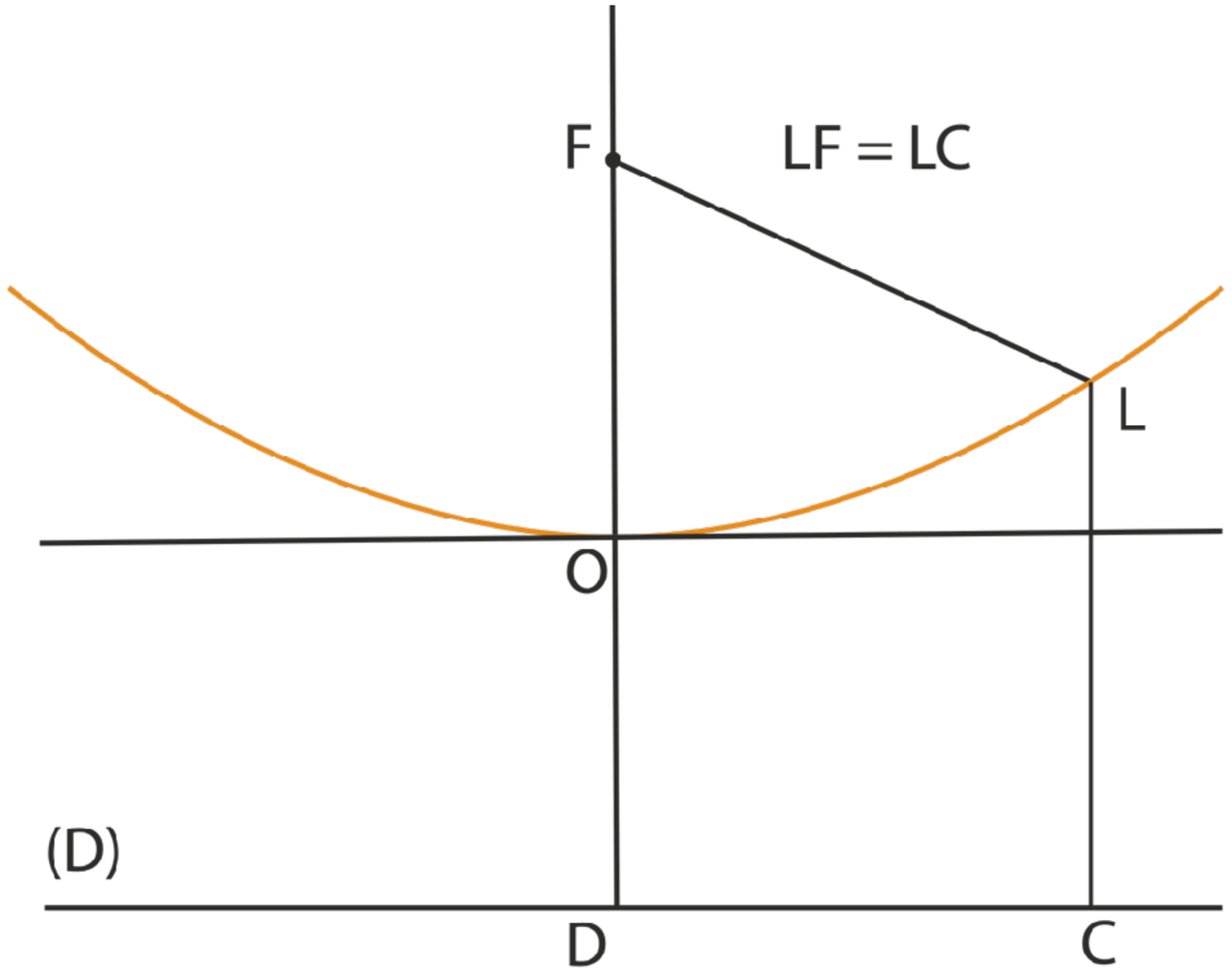
La médiatrice
du segment AB

d'une droite donnée (D)
passant par un point L



La droite parallèle à (D)
passant par L

La parabole comme lieu des points …



… équidistants d'un point F et d'une droite (D)

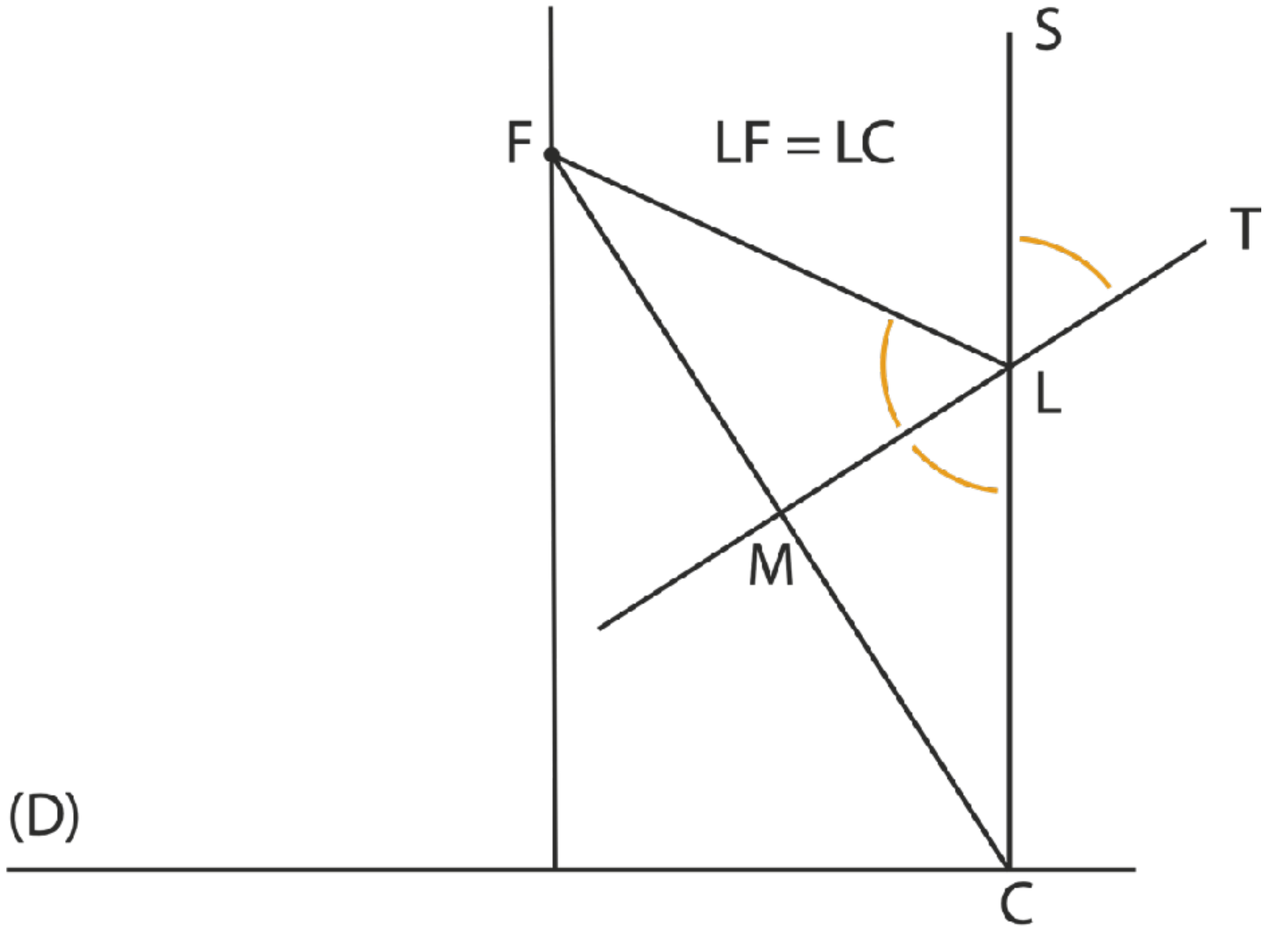
Diocles, contemporain d'Archimède

Construction du lieu des points équidistants d'un point et d'une droite au compas et à la règle

Joindre F à un point quelconque de (D)
Tracer la médiatrice MT du segment FC
Tracer la perpendiculaire CS en C à la droite

L'intersection L de la médiatrice MT et la perpendiculaire CS appartient à la parabole, puisque par définition de la médiatrice LF=LC

Remarque importante: les angles notés en rouge sur la figures sont égaux.
Ainsi un miroir dont le milieu est placé en L, orienté selon la médiatrice MT réfléchi un rayon solaire SL en F



Vérifions sur la construction des 20 miroirs que la courbe est approximativement une parabole.

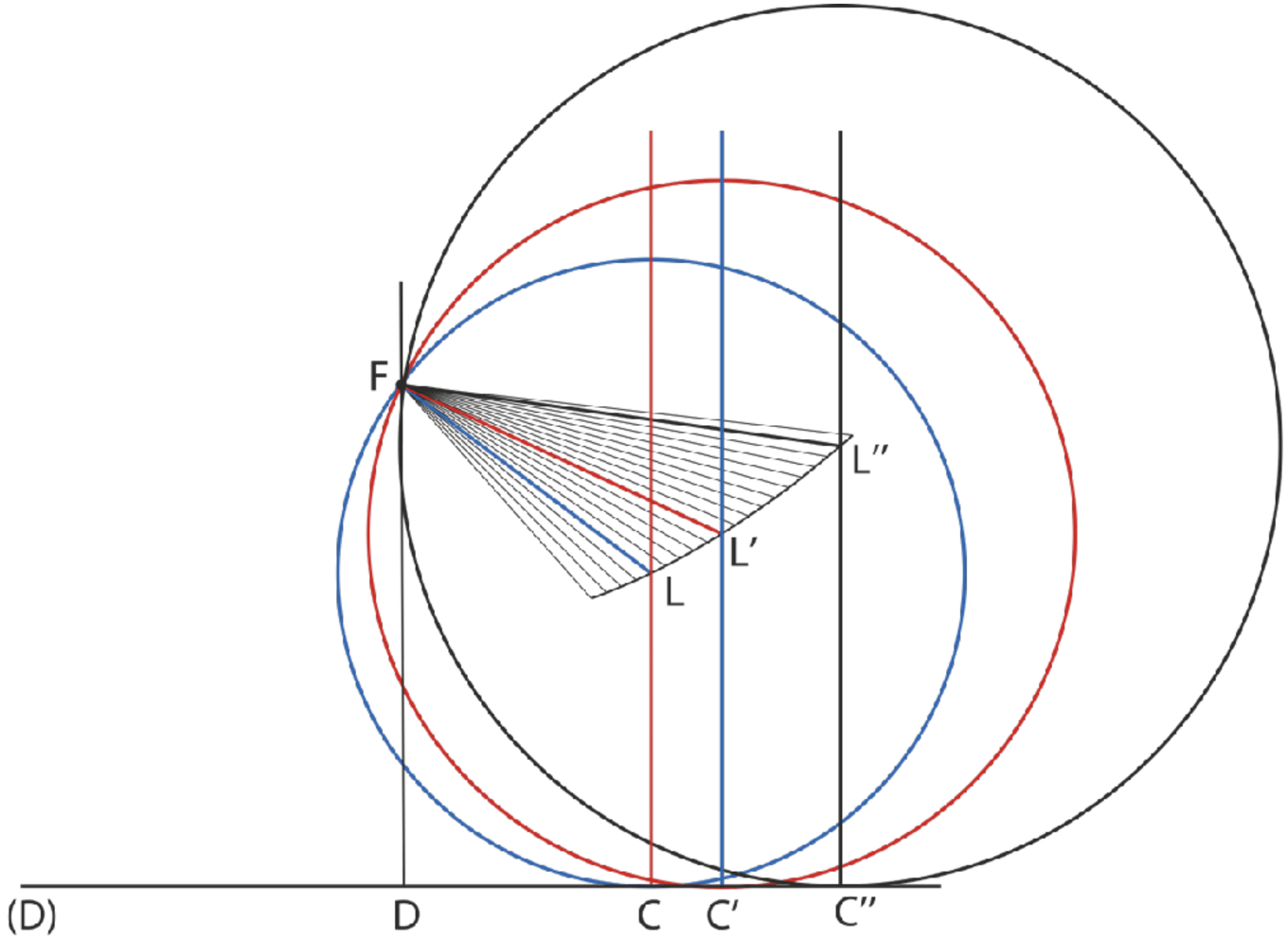
Considérons deux points quelconques de la construction L et L'.

Traçons les verticales passant par L et L'.

Traçons les cercles de centres L et L' de rayons LF et L'F.

Déterminons les points C et C' tels que LF=LC et L'F=L'C'.

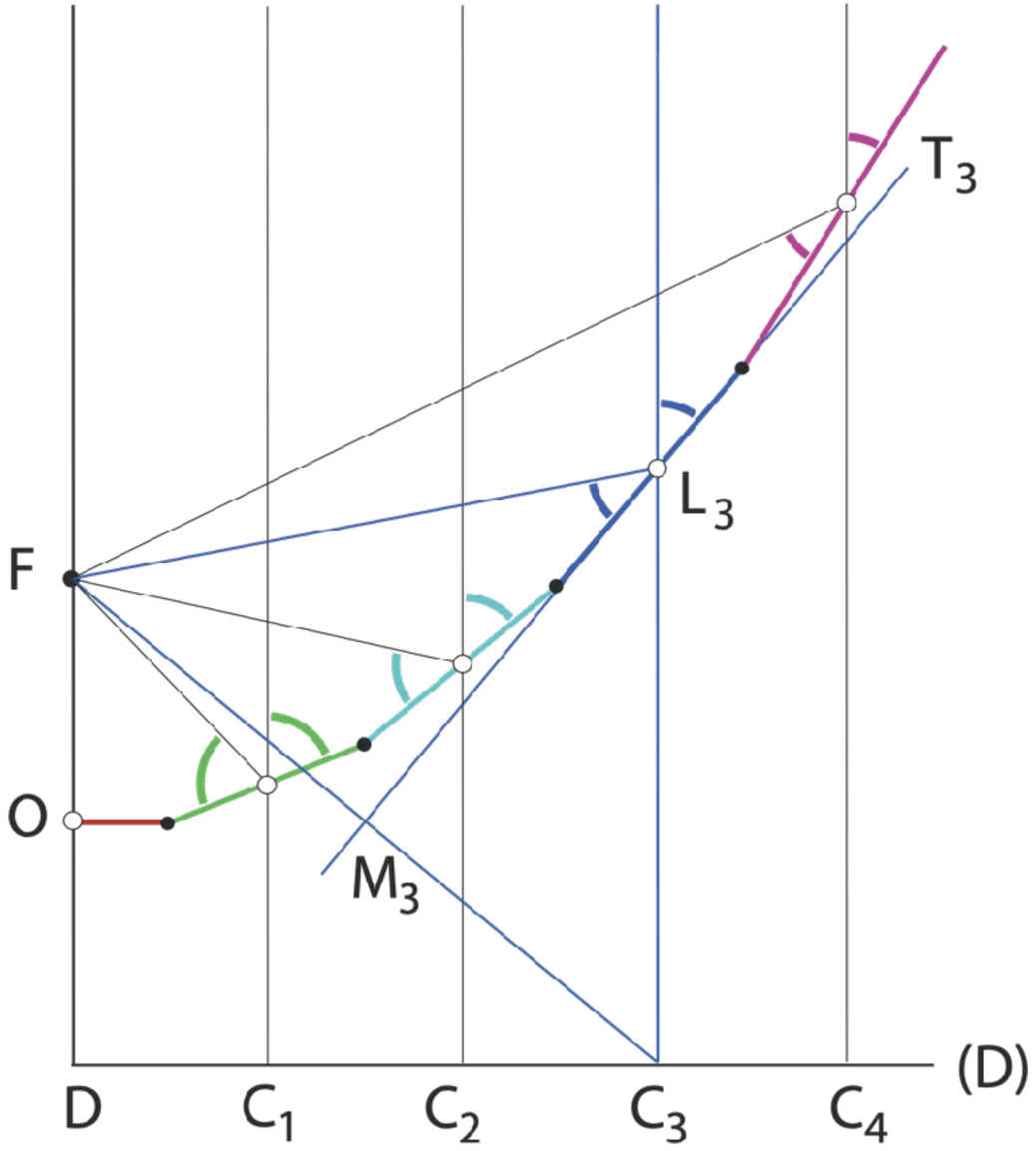
Vérifions (approximativement) que la droite (D) passant par C et C' est perpendiculaire à l'axe vertical.



L et L' sont donc équidistants de (D) et F. Le même résultat est obtenu avec un autre point quelconque F''

La construction d'Anthémius de Tralles

Anthémius se donne un point F et une droite (D). Sur cette droite, il se donne une série de points C_1, C_2, C_3, C_4, ... Il construit ensuite les points de la parabole L_1, L_2, L_3, L_4, ... définis comme l'intersection des médiatrices des segment joignant F aux points de la droite (D). La construction explicite est illustrée dans le cas de L_3. Chacune des médiatrices se coupent entre deux points successifs de la parabole (les disques noirs sur la figure). La ligne brisée joignant ces intersections constitue une approximation de la parabole. En chaque point L_i, la condition de réflexion est satisfaite: un rayon vertical qui frappe le miroir en L_i est réfléchi en F.
Lorsque la distance entre deux points C_i successifs tends vers 0, la ligne brisé tends vers la parabole.



Anthémius de Tralles, Architecte de « Sainte Sophie »

La recherche du miroir argent: résolution d'un problème de tangente inverse à l'université.

La condition de réflexion peut se ramener à une équation différentielle. Il s'agit dans la terminologie du XVII siècle de résoudre un problème de tangente inverse : connaissant la tangente en tout point d'une courbe, trouver la courbe. Un premier changement de variable permet de ramener l'équation différentielle à un problème d'intégration. Sa résolution fait intervenir la dérivé d'une fonction trigonométrique hyperbolique !

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{f - y + \sqrt{(f-y))^2 + x^2}}$$

$$y(x) = f - xz(x)$$

$$z(x) = \frac{f - y(x)}{x}$$

$$x\frac{dz}{dx} = -\sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{dx}{x}$$

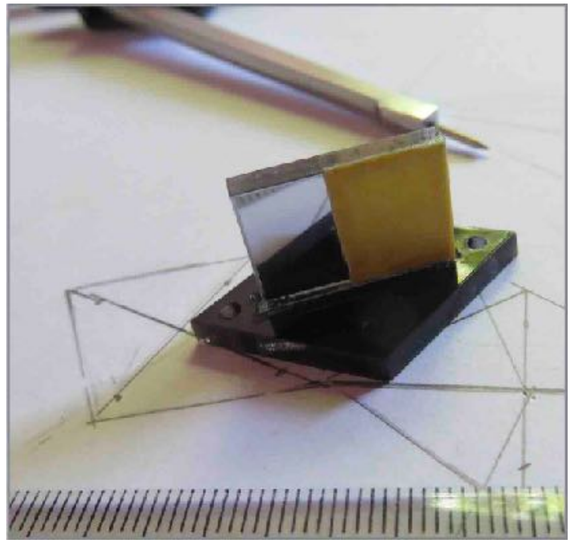
$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$z(x) = \sinh\left(-\log x + k\right)$$

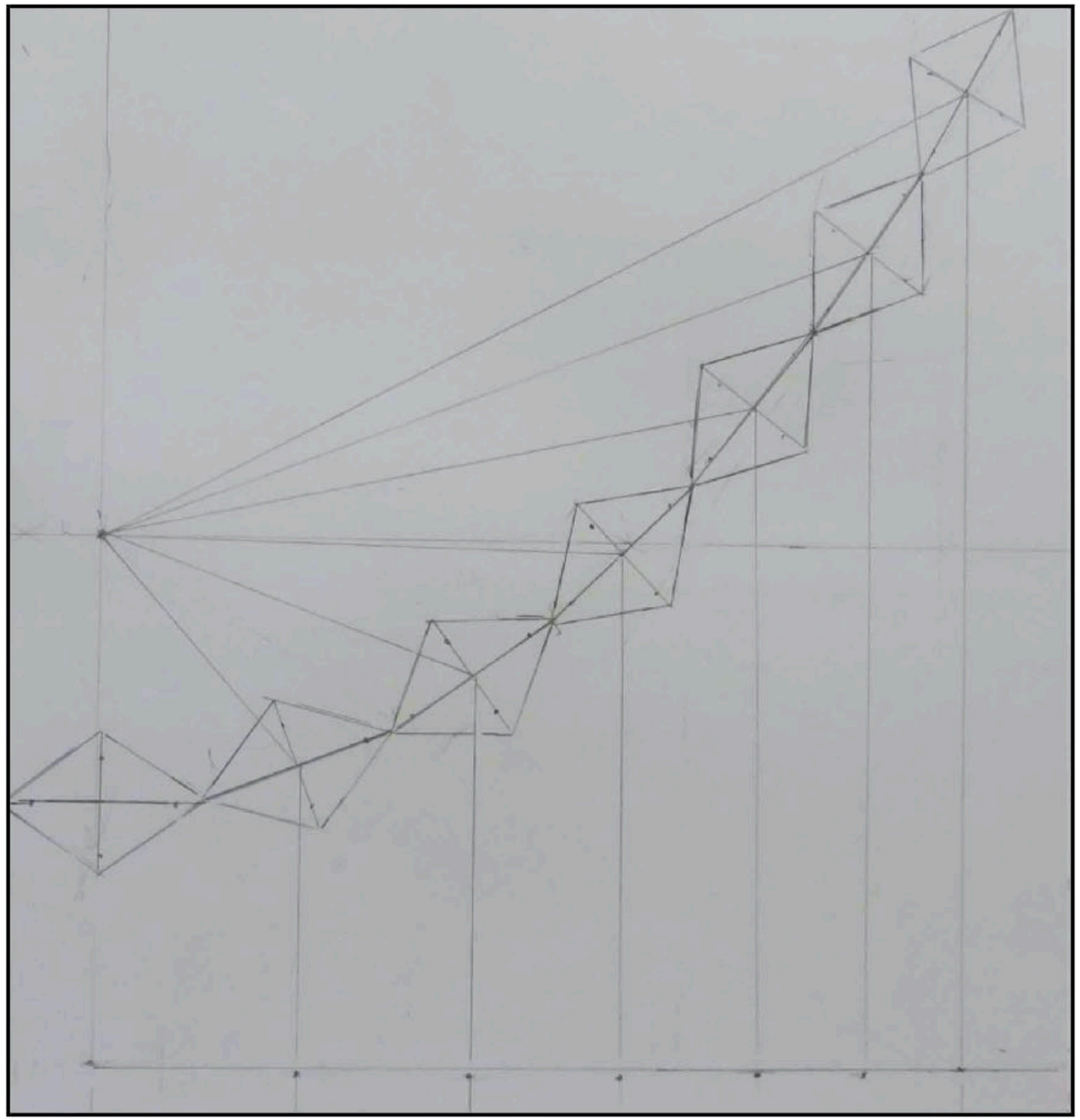
$$y(0) = 0$$

$$y(x) = \frac{x^2}{4f}$$

Vérification expérimentale de la réflexion parabolique « au compas et à la règle »



Un petit miroir est fixé sur une support en forme de losange. Une source de lumière rasante est placé à une grande distance. On cherche à placer les miroirs de façon à ce qu'ils assurent la « condition de réflexion » en leurs centres. On vérifie que les centres des miroirs sont équidistants du point de focalisation et d'une droite perpendiculaire à la direction de la source, suggérant la forme parabolique de la courbe recherchée



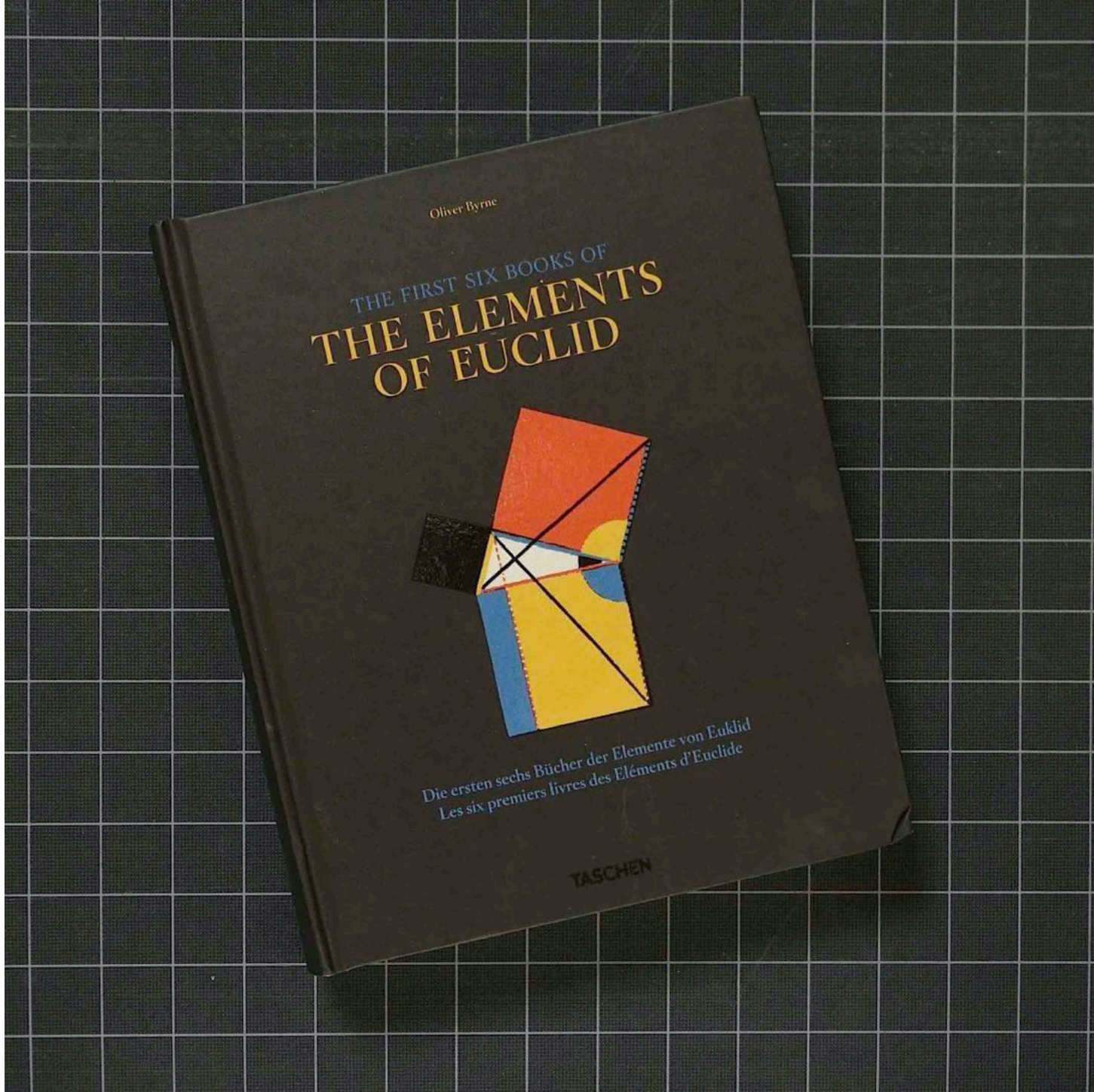
La même chose dans la cours de récréation avec une corde et une craie

On commence par choisir un objet lointain à plusieurs centaines de mètres. On place un miroir à quelques mètres d'un élève en position fixe, le futur foyer F du miroir, face à celui ci et à l'objet lointain. L'opération consiste initialement à faire pivoter le miroir jusqu'à ce que l'image de l'objet lointain, vue de l'élève, soit an centre du miroir. Un élève note alors au sol avec une craie la position du miroir. Celui ci est alors déplacé de façon à ce que son extrémité gauche coïncide avec l'empreinte de l'extrémité droite du premier miroir. On fait alors pivoter le miroir autour de ce point jusqu'à ce que l'élève-foyer observe à nouveau l'objet lointain au centre du miroir. On recommence alors l'opération un certain nombre de fois. L'utilisation de la corde et de la craie permet de montrer que les centres des miroirs appartiennent bien à une parabole.

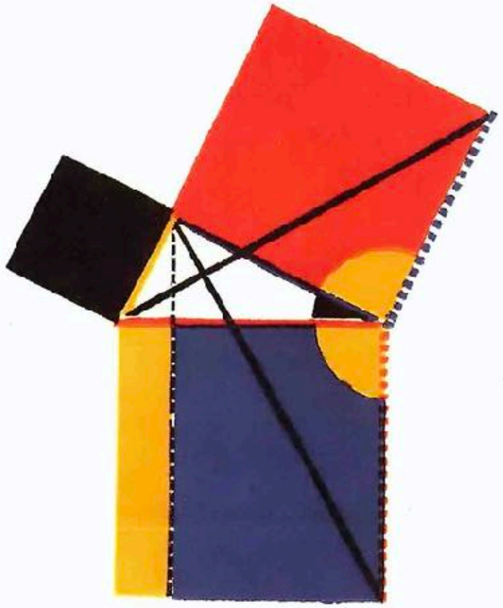


Oliver Byrne
(1847)

" Les démonstrations dans les livres d'Euclide ont été généralement effectuées par des mots, des lettres et des diagrammes; mais comme l'utilisation de symboles, de signes et de diagrammes colorés dans les arts et les sciences linéaires rend le processus de raisonnement plus précis et la réalisation plus rapide, ils ont été adoptés en conséquence dans ce cas ". Oliver Byrne,1847.



Demonstration du théorème de Pythagore (Euclide-Byrne)



IN *a right angled triangle*  *the ſquare on the hypotenuſe* —— *is equal to the ſum of the ſquares of the ſides,* (—— *and* ——).

On ——, —— and —— deſcribe ſquares, (pr. 46.)

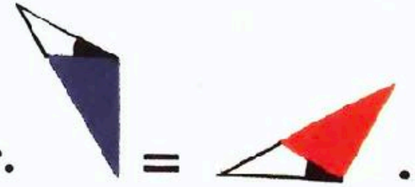
Draw ---------- || ---------- (pr. 31.)

alſo draw —— and ——.

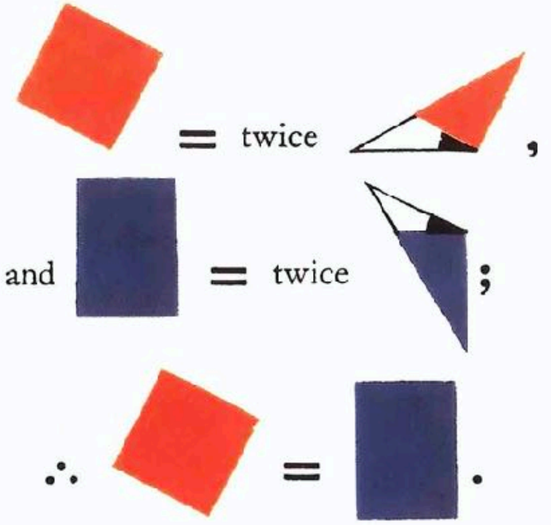


To each add  ∴ ,

—— = ---------- and —— = ----------;

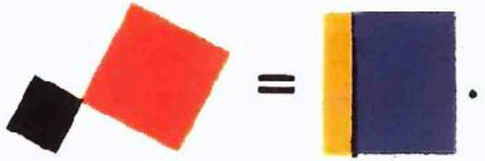


Again, becauſe —— || ----------



In the ſame manner it may be ſhown

that ;

hence .

Q. E. D.

Vladimir Arnold (1937-2010)

Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale qui étudie le monde qui nous entoure. Elle fait partie des sciences de la nature. Les mathématiques sont la partie de la physique pour laquelle les expériences ne coûtent pas cher.

Coupées de la physique, et comparables à la scolastique, les mathématiques n'étaient plus adaptées ni l'enseignement ni aux applications dans d'autres sciences. Il en résulta une haine généralisée envers les mathématiciens, aussi bien de la part des infortunés élèves (dont certains devinrent ministres) que des utilisateurs.

Malheureusement, c'est cette construction laide et perverse des mathématiques qui a dominé leur enseignement pendant des décennies. Née en France, cette perversion s'est rapidement répandue dans l'enseignement des mathématiques élémentaires, d'abord aux étudiants, puis aux élèves de tous niveaux.

« Euclides » en el Museo de Artes Contemporáneas de Santiago, Chile

Noviembre de 2022 - Enero 2023





Roshdi Rashed



Le musée des sciences arabes au Sultanat d’Oman:
Une collaboration avec Roshdi Rashed, l’un des plus grands historiens des sciences mathématiques et physiques de la Grèce au dix-septième siècle en passant par le monde Arabo-Musulman



Un musée des sciences Arabes au Sultanat d’Oman



Le miroir concave du musée des sciences arabes

IEA TIMSS & PIRLS International Study Center
BOSTON COLLEGE
Lynch School of Education

TIMSS 2019 (Trends in Mathematics and Science Study)

La France et le Chili au dernier rang du classement des « Tendances en Mathématiques et des études scientifiques » (TIMSS) en 2019 !

Un enseignement d'élites, conduisant à une fracture culturelle !

