Los espejos de Euclides

Pierre Coullet
pcoullet@mac.com
INPHINI, Université de la Côte d'Azur

Jaime San Martin
jsanmart@dim.uchile.cl
CMM, Universidad de Chile

Desde Euclides hasta Newton incluidos, los fenómenos naturales (el equilibrio, la luz y el movimiento) se describían mediante la geometría elemental. La física ha sido reescrita desde principios del siglo XVIII en términos de cálculo diferencial e integral, lo que hace imposible enseñarla antes de la universidad. En esta conferencia, sobre el sencillo ejemplo de la ley de la reflexión de la luz, queremos mostrar la ventaja de volver a una descripción geométrica. En este ejemplo mostramos en paralelo la vía geométrica y la analítica.

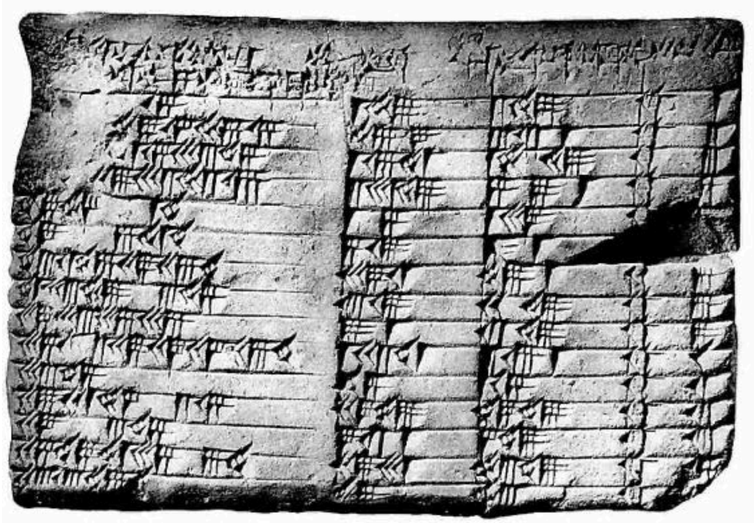
Se verá que la vía geométrica permite una enseñanza concreta, tanto matemática como experimental. Se ha experimentado en varios centros de enseñanza secundaria en relación con la Universidad de la Costa Azul, en forma de proyectos que asocian a un profesor de matemáticas y otro de física. Además de estos dos profesores principales, hay profesores de Artes Plásticas, Historia y Tecnología.

El ejemplo considerado forma parte del capítulo "Luz" de un trabajo en curso. También incluirá un capítulo sobre "Equilibrio" y otro sobre "Movimiento".

Matemáticas

El nacimiento de las matemáticas parece coincidir con la aparición de la escritura. Todas las grandes civilizaciones, desde el hinduismo hasta Mesopotamia y Egipto, desarrollaron independientemente una cultura matemática. Por un lado, surge de la modelización de las regularidades de ciertos fenómenos naturales, como el movimiento de los astros en la esfera celeste, y por otro, de problemas concretos como el cálculo de superficies o el reparto de herencias. Las matemáticas parecen ser un elemento de cultura bastante singular por su carácter universal.

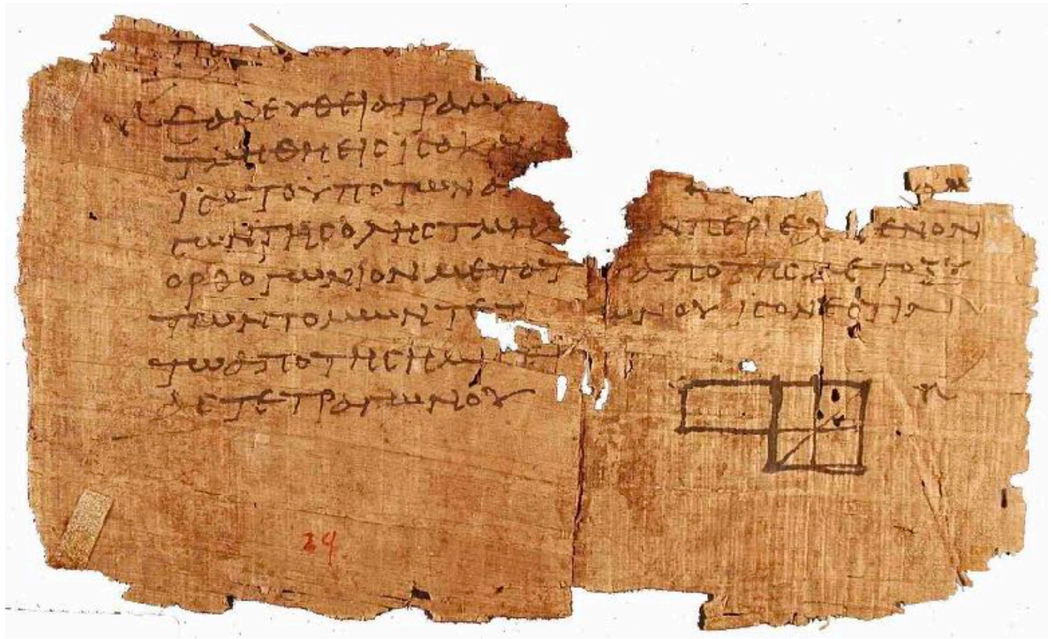






De las matemáticas utilitarias a las abstractas

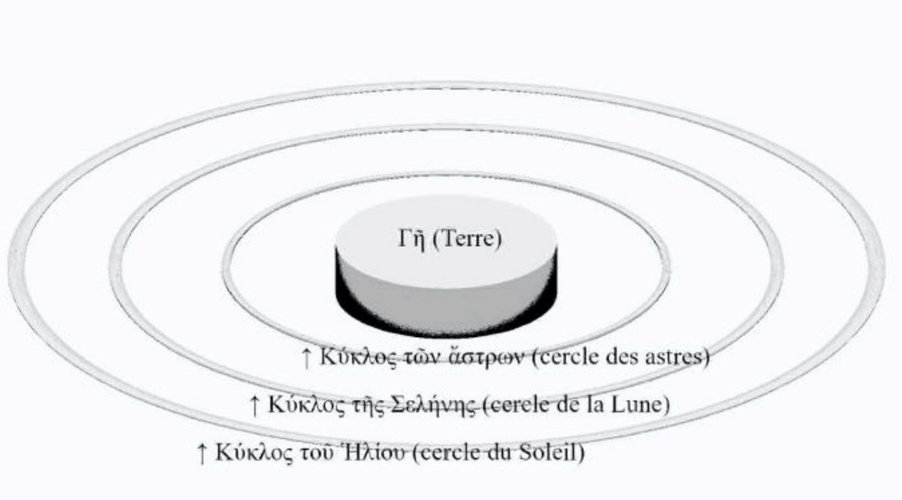
Fue en Grecia, en el siglo VII a.C., donde las matemáticas adquirieron su carácter abstracto casi definitivo. Su espectacular desarrollo se resume en los "Elementos de Euclides", que datan del siglo III a.C. Los "Elementos" son el escrito matemático más antiguo que se conserva. Eudemo de Rodas, considerado el primer historiador de la ciencia y alumno de Aristóteles, nos ha dejado sin embargo los medios para reconstruir la historia de las matemáticas entre Tales (620-545 a.C.) y Euclides (300 a.C.). Su historia de la geometría griega sólo ha llegado hasta nosotros a través de la obra posterior de Proclus, un filósofo neoplatónico del siglo IV de nuestra era. Es una de las grandes fuentes de la historia de las matemáticas durante el periodo helénico.



Fragmento de los "Elementos" contemporáneos de Euclides

Una filosofía de la naturaleza

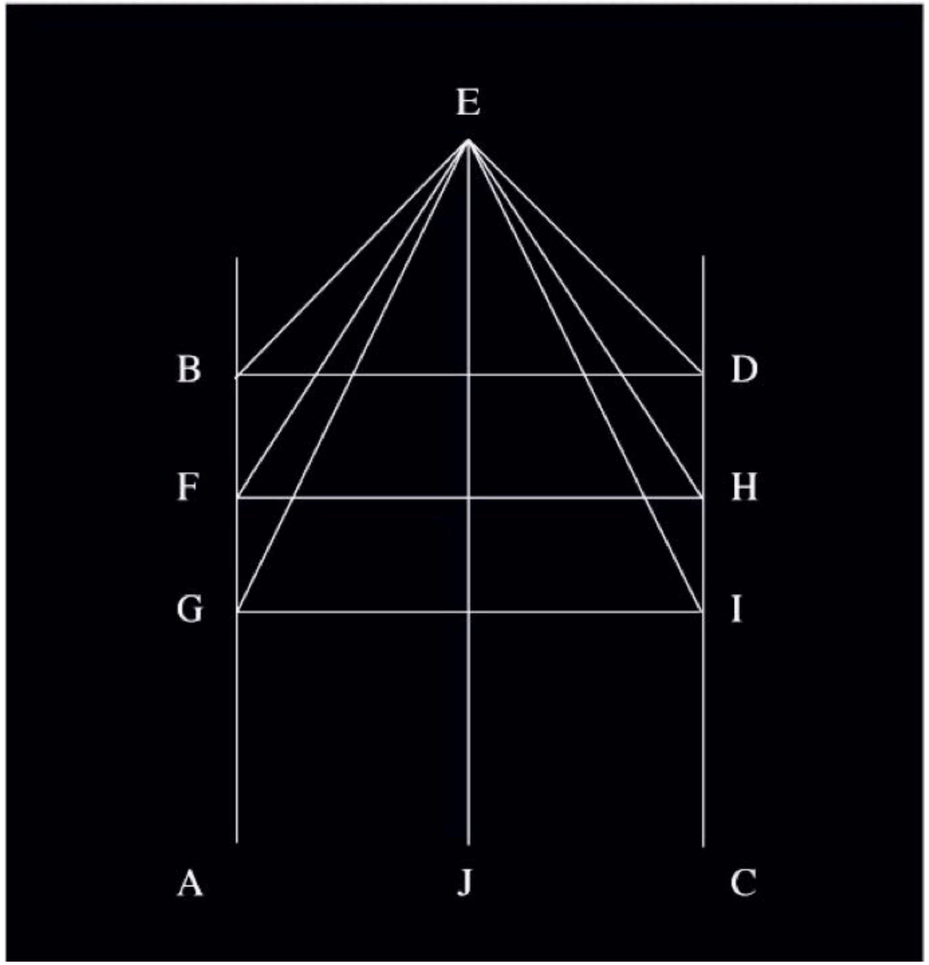
La física, que debe entenderse como el intento de desmitificar los fenómenos naturales, nació en Mileto con tres filósofos: Tales, Anaximandro y Anaxímenes. Desarrollaron una verdadera filosofía de la naturaleza sustituyendo las explicaciones mitológicas por argumentos racionales. Anaximandro (610-546 a.C.), alumno y sucesor de Tales en la Escuela de Mileto, fue el que más lejos llegó en este sentido. Habría sido el primero en dejar constancia de sus estudios en una obra que desgraciadamente no ha sobrevivido. Es a Aristóteles y a sus comentaristas a quienes debemos elementos del pensamiento de Anaximandro.



La cosmologie d'Anaximandre

Cuando la Filosofía de la Naturaleza se hace matemática con Euclides

Del encuentro de esta filosofía de la naturaleza con las matemáticas nació la física moderna. La primera obra conservada que da testimonio de este encuentro es la de Euclides. En una obra sobre "óptica" que se le atribuye, describe la perspectiva desde un punto de vista geométrico.



Los peldaños de una escalera vistos desde un observador situado en E parecen más pequeños cuanto más lejos están

¿Está el libro de la naturaleza escrito en el lenguaje de las matemáticas?

Este poderoso método de análisis de los fenómenos naturales ha seguido desafiando a los científicos a lo largo de los siglos. Así escribió Galileo: "El libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático. Einstein se preguntaba: "¿Cómo es posible que las matemáticas, que son un producto del pensamiento humano y son independientes de toda experiencia, puedan adaptarse de forma tan admirable a los objetos de la realidad? Entonces Richard Feymann: "La física es matemática no porque sepamos mucho sobre el mundo físico, sino porque sabemos muy poco. Sólo las propiedades matemáticas del mundo son accesibles para nosotros, y el poder de la física proviene precisamente del hecho de que limita sus ambiciones a cuestiones matemáticamente tratables.





Experimentos y matemáticas

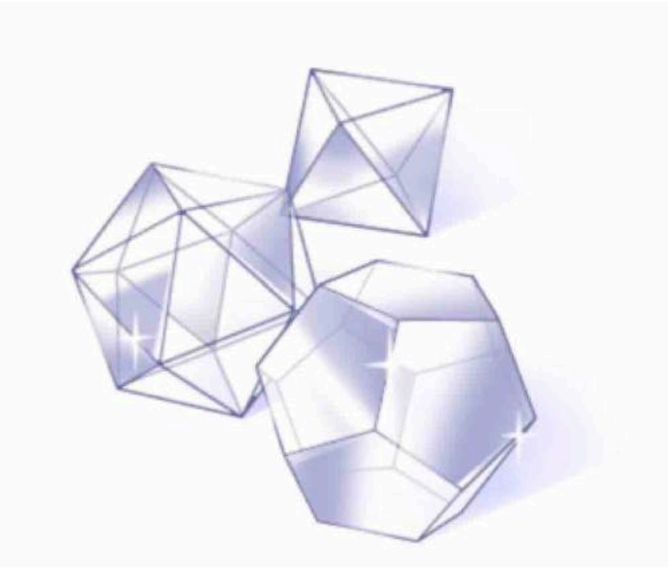
El espectacular progreso de la Física se debe, por una parte, a la eficacia de la modelización matemática, pero también al desarrollo del método experimental. Arquímedes lo utilizó muy probablemente, en particular para verificar la ley del empuje de los cuerpos sumergidos. En el siglo I d.C., Ptolomeo estableció las leyes de la refacción con la ayuda de un dispositivo experimental. En el siglo XI, Ibn al Haytham desarrolló una serie de experimentos cruciales para establecer las leyes de la óptica. Parece ser el fundador del método experimental. El método experimental es, por un lado, la extensión de la pura observación del mundo real. Este aspecto del método experimental, que en un principio utilizaba dispositivos rudimentarios, adquirió sus credenciales en el siglo XVII, con el uso de instrumentos más sofisticados, como el telescopio con Galileo y el microscopio con Robert Hooke. Pero la experimentación permite, sobre todo, acercar un fenómeno natural a su modelo matemático, restringiéndolo fuertemente.



Galileo demuestra la caída de los cuerpos en un plano inclinado a Don Giovanni de Medici, a la derecha del cuadro, que parece tener poco interés .... El pintor Giuseppe Bezzuolli (1839) ha olvidado la presencia de campanas dispuestas a distancias proporcionales a los números impares, elemento esencial de la demostración, demostrando así su falta de cultura científica.

Modelos matemáticos de la física

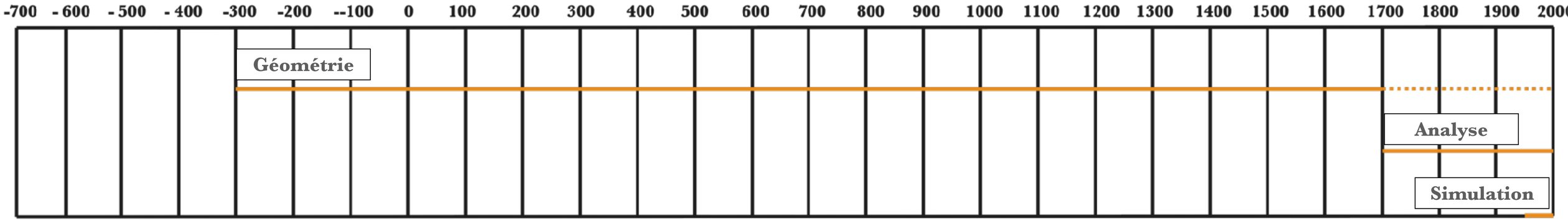
La física ha seguido el desarrollo de las matemáticas. Esencialmente geométrica, durante casi 20 siglos, desde Euclides hasta Newton, utilizó ampliamente el cálculo diferencial a partir del siglo XVIII, lo que le permitió abordar problemas más complejos, como la dinámica de los fluidos. La física se volvió "probabilística" a mediados del siglo XIX con la llegada de la física estadística, que permitió relacionar el comportamiento microscópico de los átomos con las propiedades macroscópicas de la materia. A principios del siglo XX, la física cuántica utilizaba el formalismo abstracto de los operadores. Al mismo tiempo, Einstein desarrolló una teoría de la gravitación basada en la geometría diferencial no euclidiana. Por último, desde el final de la Segunda Guerra Mundial, tras los primeros cálculos utilizados para la fabricación de la bomba atómica, y luego la carrera armamentística durante la Guerra Fría, la simulación digital ha sido ampliamente utilizada por los físicos. La inteligencia artificial, por su parte, podría resultar una herramienta especialmente eficaz para analizar el mundo real y su complejidad.



Tres de los cinco Sólidos platónicos

La gran cancelación

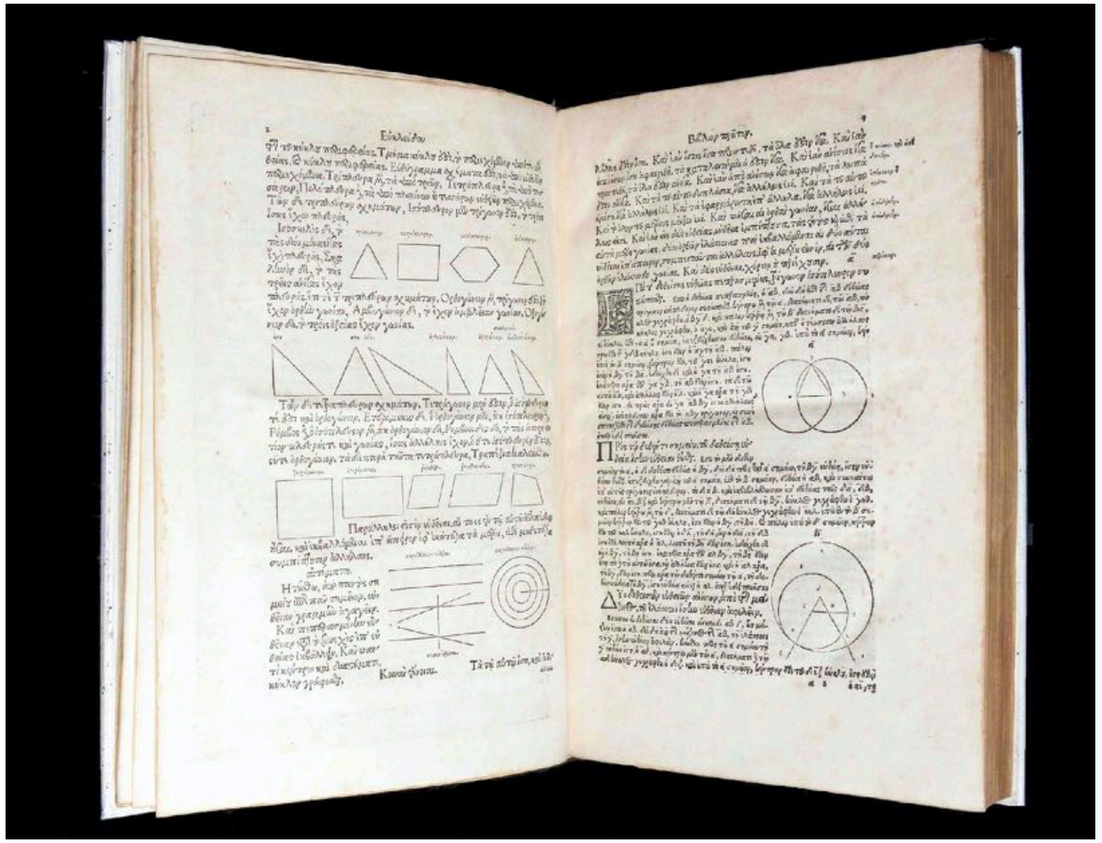
20 siglos de "Geometría" olvidada, reescrita y enseñada en términos de cálculo diferencial e integral (análisis), lo que dificulta o imposibilita su transmisión antes de la enseñanza universitaria.



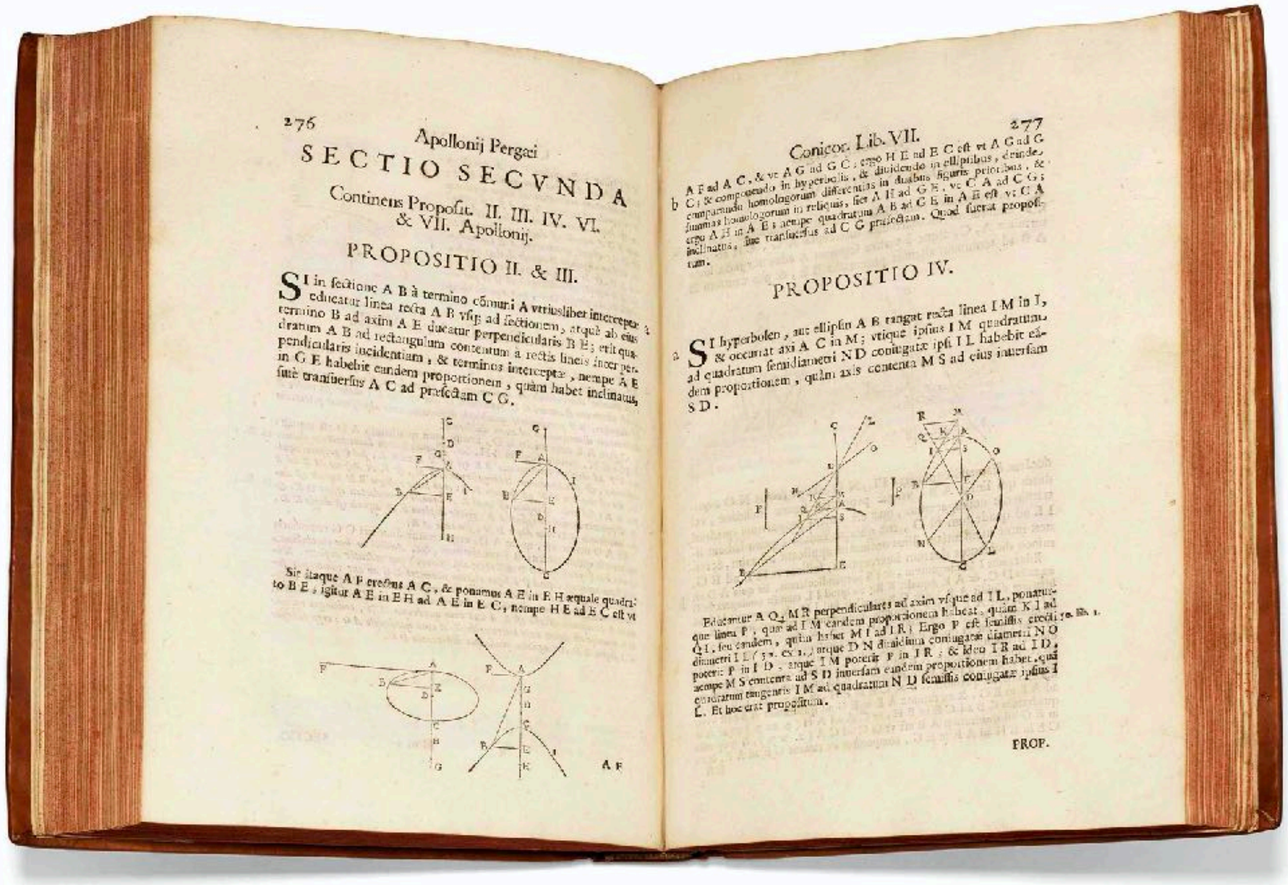
20 siglos de geometría: equilibrio, luz y movimiento

Desde el año 300 a.C. (Euclides) hasta el 1700 a.C. (Newton), las leyes de la física se describieron exclusivamente mediante la geometría euclidiana (geometría elemental) y la geometría de Apolonio (geometría de las curvas cónicas como la elipse, la parábola y la hipérbola), ambas del siglo III a.C.

Veinte siglos de física basados en dos monumentos de la ciencia geométrica ....



Los "Elementos" de Euclides, 300 a.C.



"Las cónicas de Apolonio", 220 a.C.

... que ha ido desapareciendo gradualmente desde mediados del siglo XIX

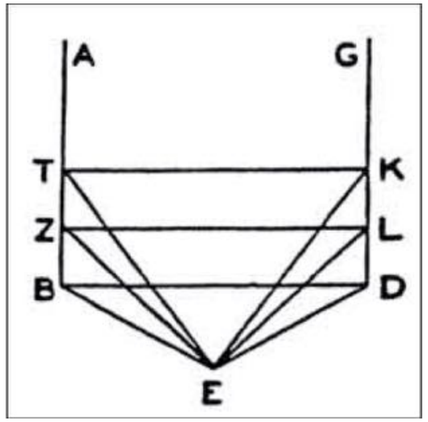
El objetivo: reescribir la física elemental (Equilibrio, Luz y Movimiento)
en su lenguaje geométrico original.

(1) Recuperar el gusto por la geometría
(2) La enseñanza de la física elemental en la escuela secundaria
(3) Desarrollar una cultura científica basada en la historia

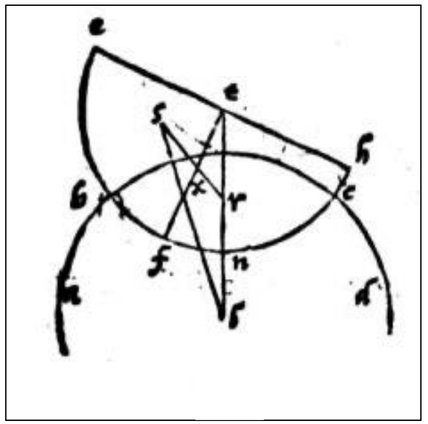
Lo ilustramos con el estudio de dos problemas, el del Heliostat y el del espejo "en combustion"

Mostramos en paralelo el análisis moderno de estos problemas tal y como se hace en la universidad y el que encuentra sus raíces geométricas. Este último se ha experimentado con éxito en los centros de secundaria, con alumnos de once a doce años.

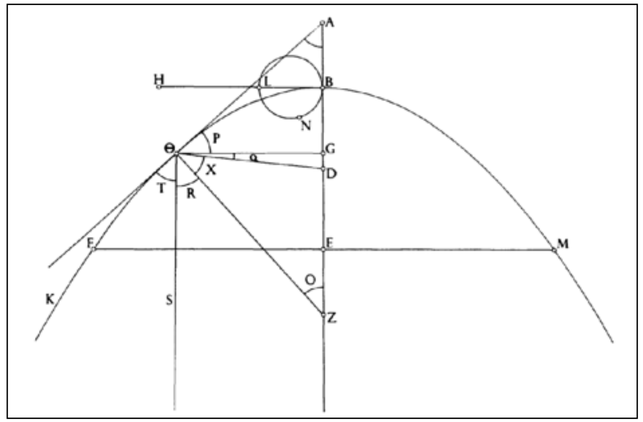
Física y Geometría



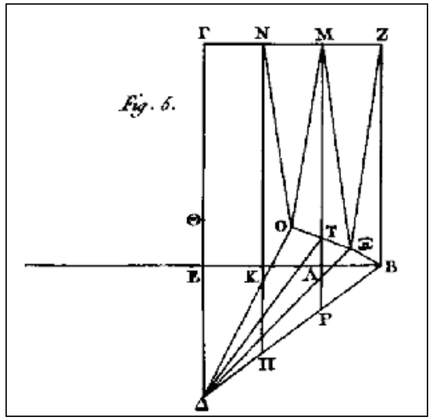
La perspectiva
Euclides (300 a.C.)



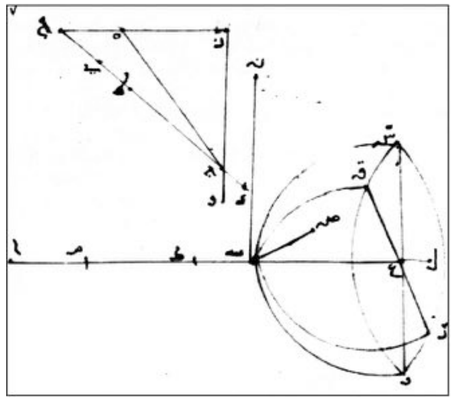
La estabilidad de los cuerpos flotantes
Arquímedes (-250)



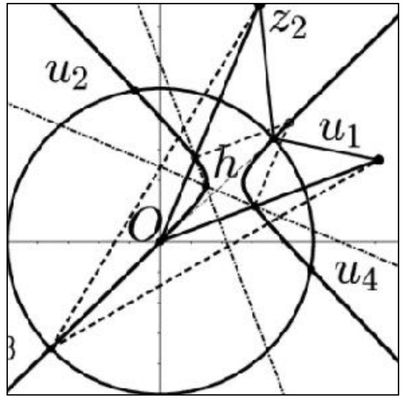
El espejo parabólico
Diocles (-200)



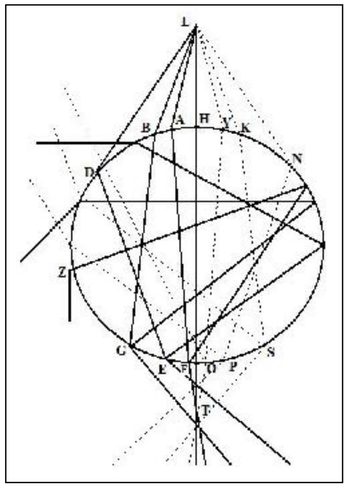
El espejo elíptico
Anthemius de Tralles (500)



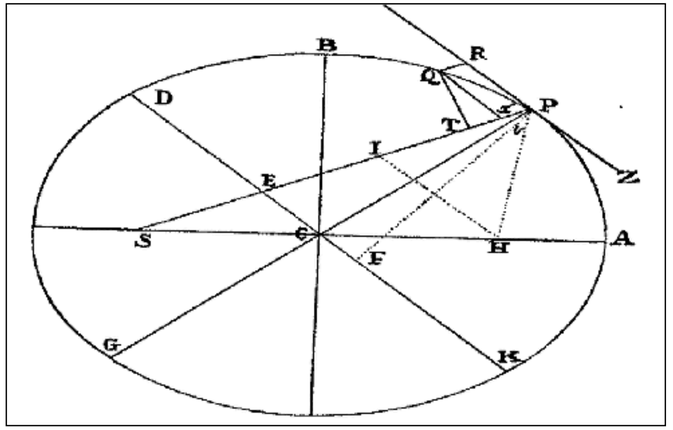
La lente hiperbólica
Ibn Sahl (984)



Imágenes múltiples en un espejo circular
Ibn Al Haytham (1000)



El arco iris,
al Farisi (1300)
Thierry de Freiberg (1300)



La ley universal de la gravitación,
Newton (1687)

La física moderna nació hace unos 23 siglos. Durante 20 siglos, los fenómenos naturales se describieron únicamente en el lenguaje de la geometría.

El Heliostat

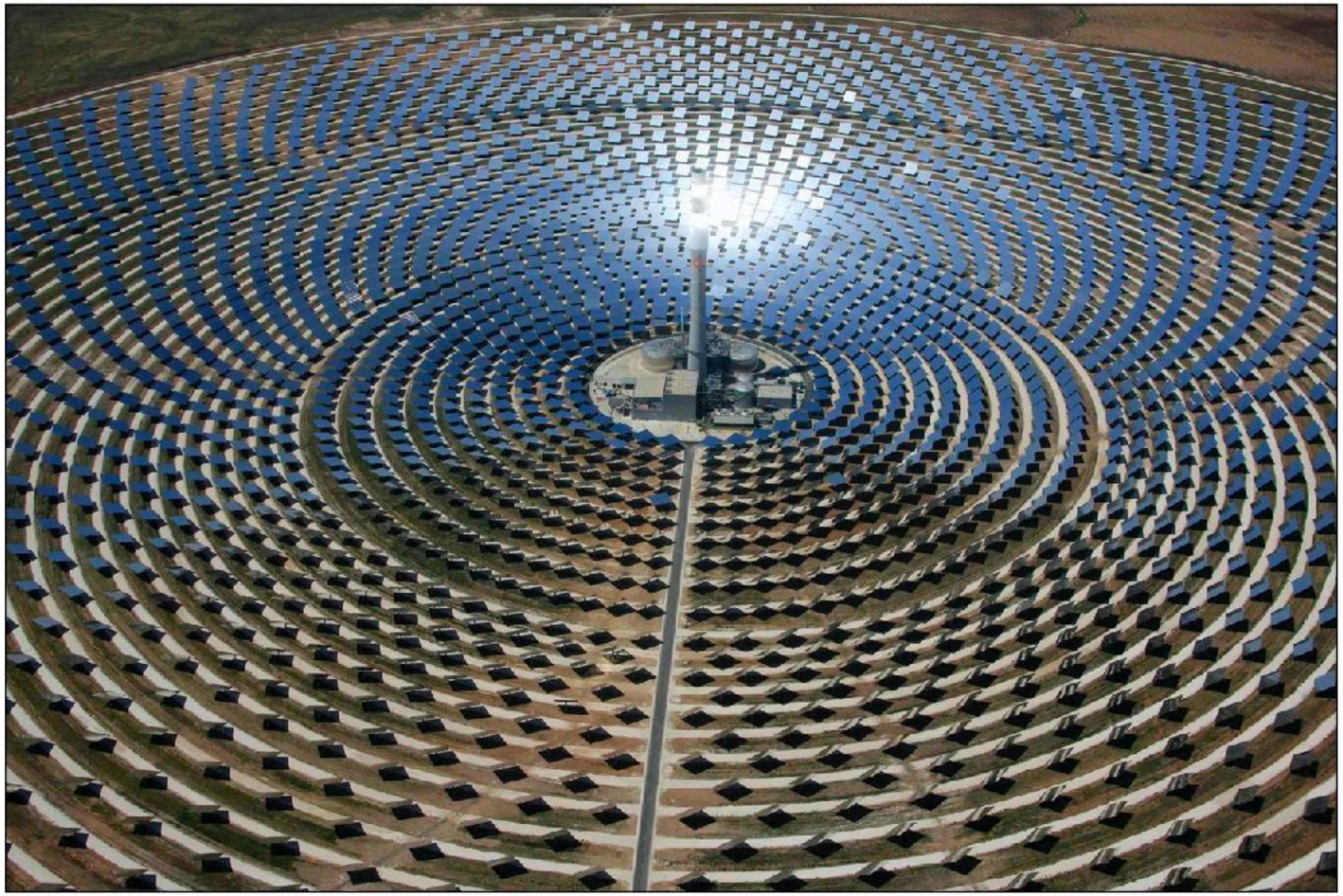
El heliostato es un dispositivo que sirve para dirigir los rayos del sol en una dirección determinada. Al parecer, este dispositivo, utilizado desde la época del antiguo Egipto para iluminar las habitaciones del interior de las pirámides, se emplea ahora para construir hornos solares e incluso para iluminar túneles de autopistas, como el que une Savona con Cuneo en Italia.



Un mecanismo de relojería permite redirigir los rayos del sol en una dirección fija. Silbermann (1806-1865)

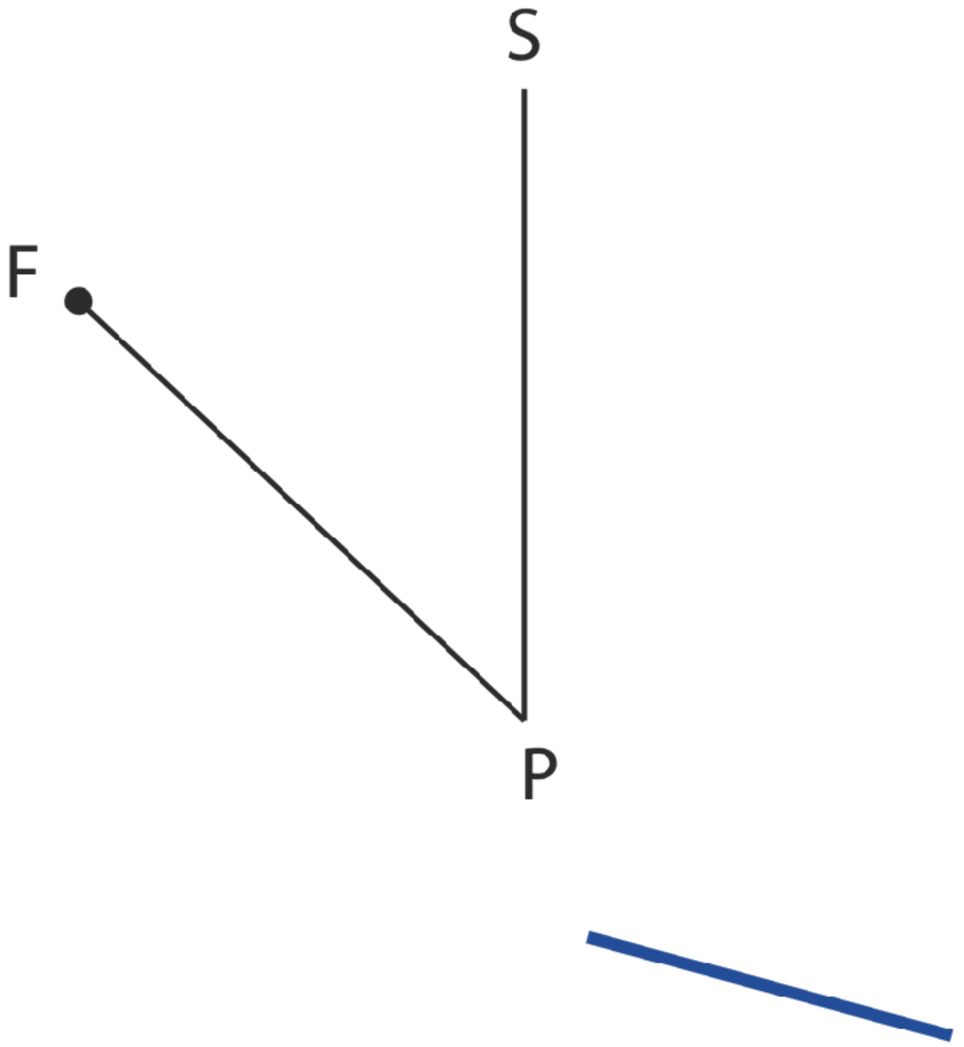
Campos de Heliostat





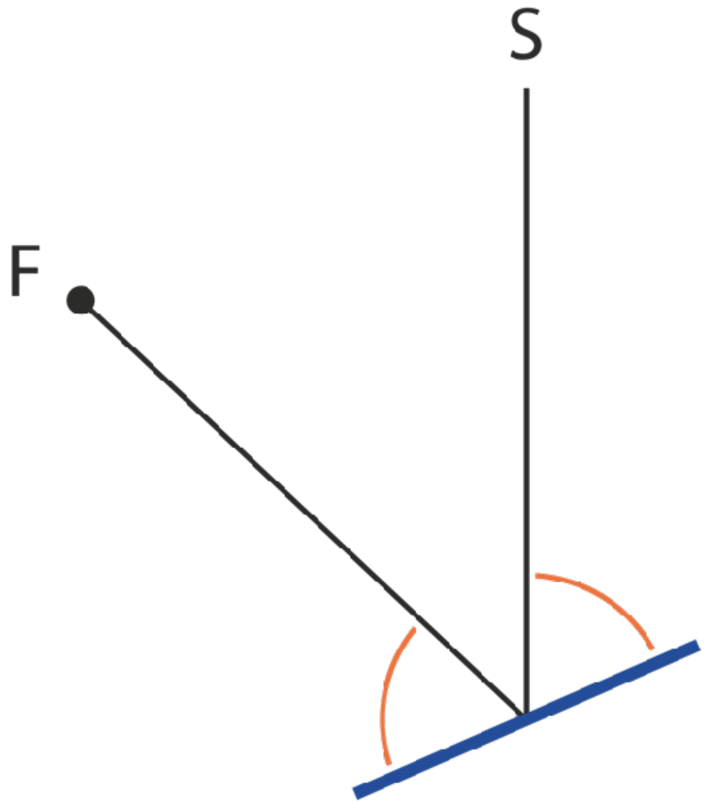
Se busca la orientación de un espejo para que un rayo SP del sol se refleje en F. Este problema puede reducirse a dos dimensiones. El plano de la figura es el generado por las dos líneas (PS y PF). El plano del espejo debe elegirse entonces para que sea ortogonal al plano de la figura. El espejo aparece como una línea en este plano.

La cuestión es entonces cómo orientar un espejo colocado en P de manera que se consiga esta "condición de reflexión".

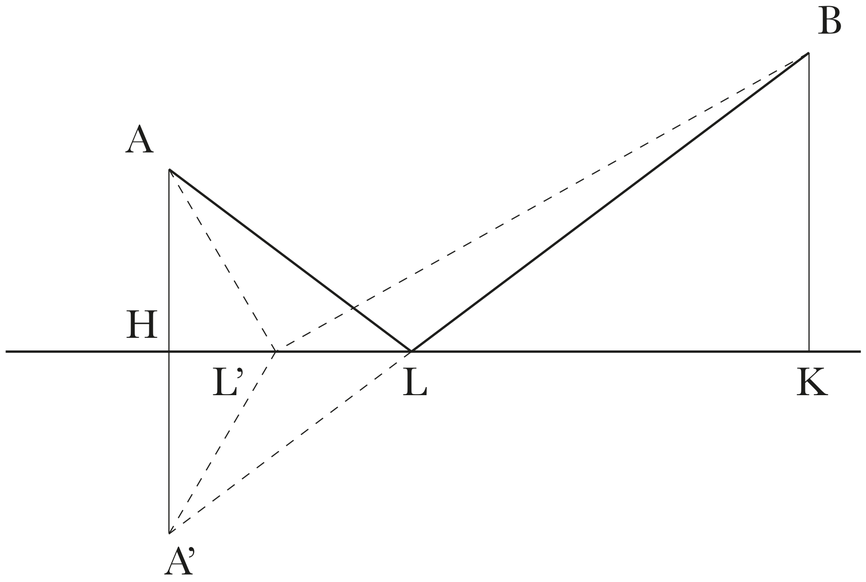


La ley de la reflexión de la luz es probablemente la primera ley de la naturaleza conocida por los antiguos. Impone la igualdad de los ángulos de los rayos incidentes y reflejados con el plano del espejo. Se encuentra implícito en un texto de Platón y sobre todo de Aristóteles. Probablemente se conocía antes que estos autores.

La orientación del espejo tal y como aparece en la figura no permite que se cumpla la condición de reflexión de un rayo SP hacia F.



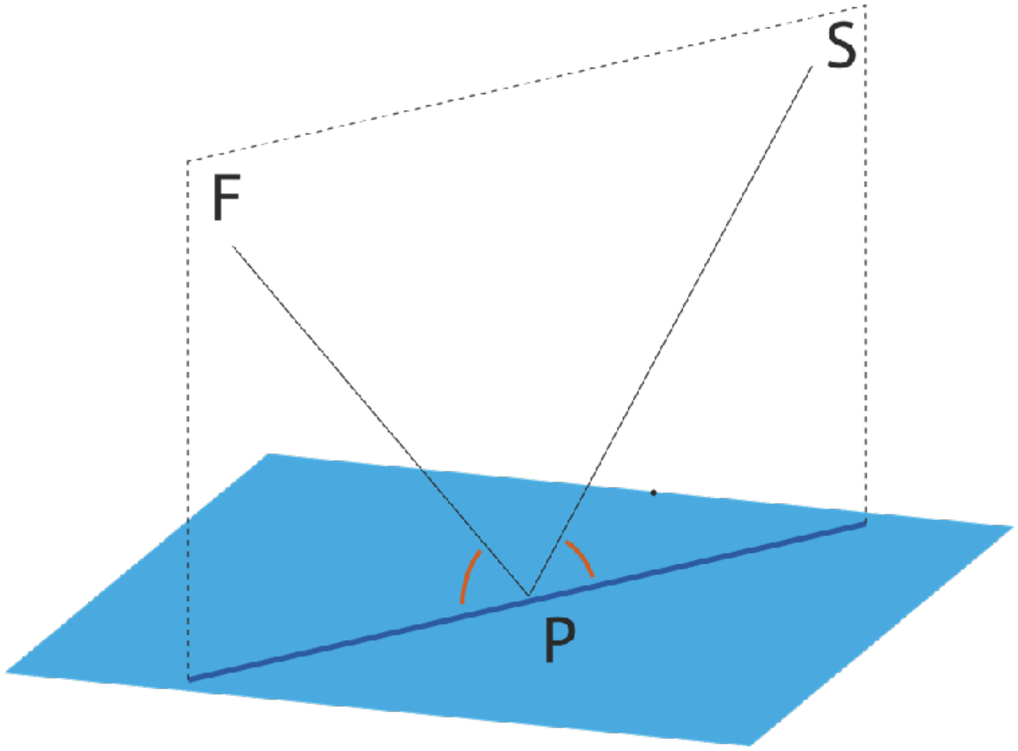
Herón de Alejandría (100 a.C.): Un principio de minimización

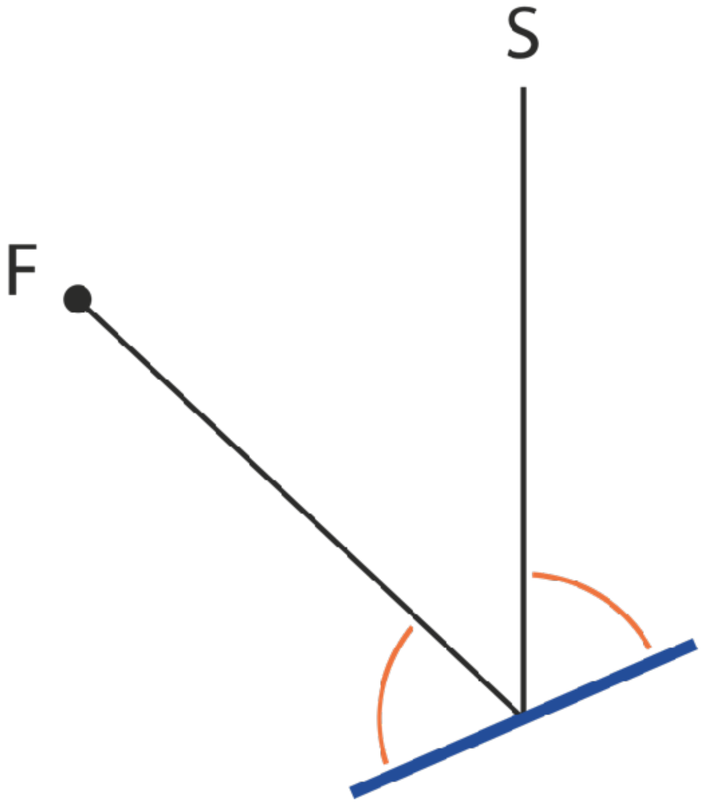


Los triángulos AHL y BKL son similares. La cifra correspondiente se puede encontrar en un libro sobre espejos. Atribuido erróneamente a Euclides, es posible que se trate de un argumento de Arquímedes recogido en un libro desaparecido. Esta observación permite proponer un experimento visual en el que dos alumnos se ven frente a un espejo y comprueban la similitud de los triángulos AHL y BKL.

Herón de Alejandría (100 a.C.): El "camino óptico" que conecta A con B a través de un punto L en el espejo es el camino más corto. En efecto, para cualquier otro punto L' que no alcance la igualdad de los ángulos de los rayos incidente y reflejado con el plano del espejo, AL'+L'B>AL+LB. Para demostrarlo colocamos el punto A' simétrico a A con respecto al espejo. Tenemos AL=A'L, por lo que el recorrido óptico es también igual a A'LB. Pero también tenemos AL'=A'L' para que el camino AL'B sea igual al camino A'L'B. Tenemos A'LB<AL'B. De hecho, en cualquier triángulo, la suma de los dos lados es siempre menor que el otro.

La figura de la derecha muestra la configuración del espejo que consigue la "condición de reflexión" en F. La figura siguiente sitúa el espejo en el espacio.

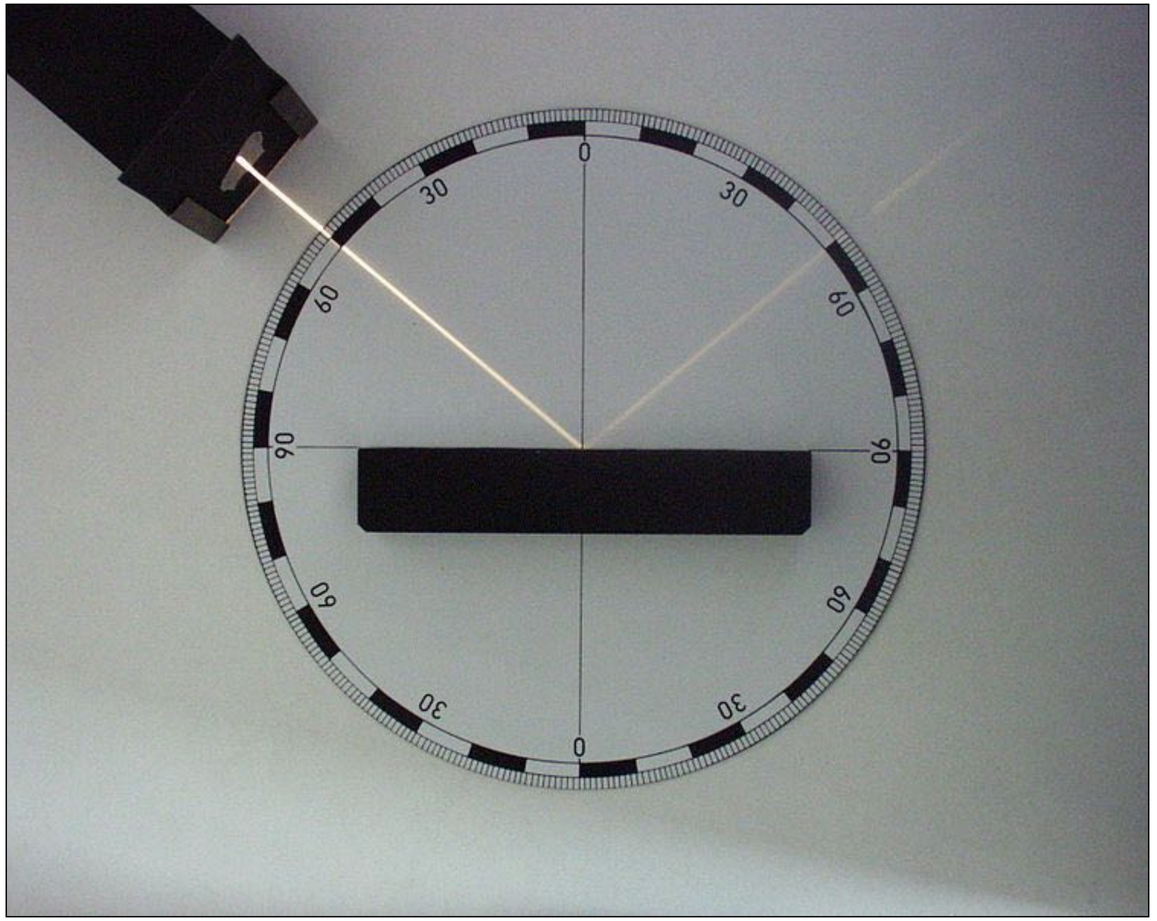




La configuración bidimensional puede lograrse experimentalmente utilizando una fuente de luz artificial que roce la superficie. El experimento se describe a continuación.

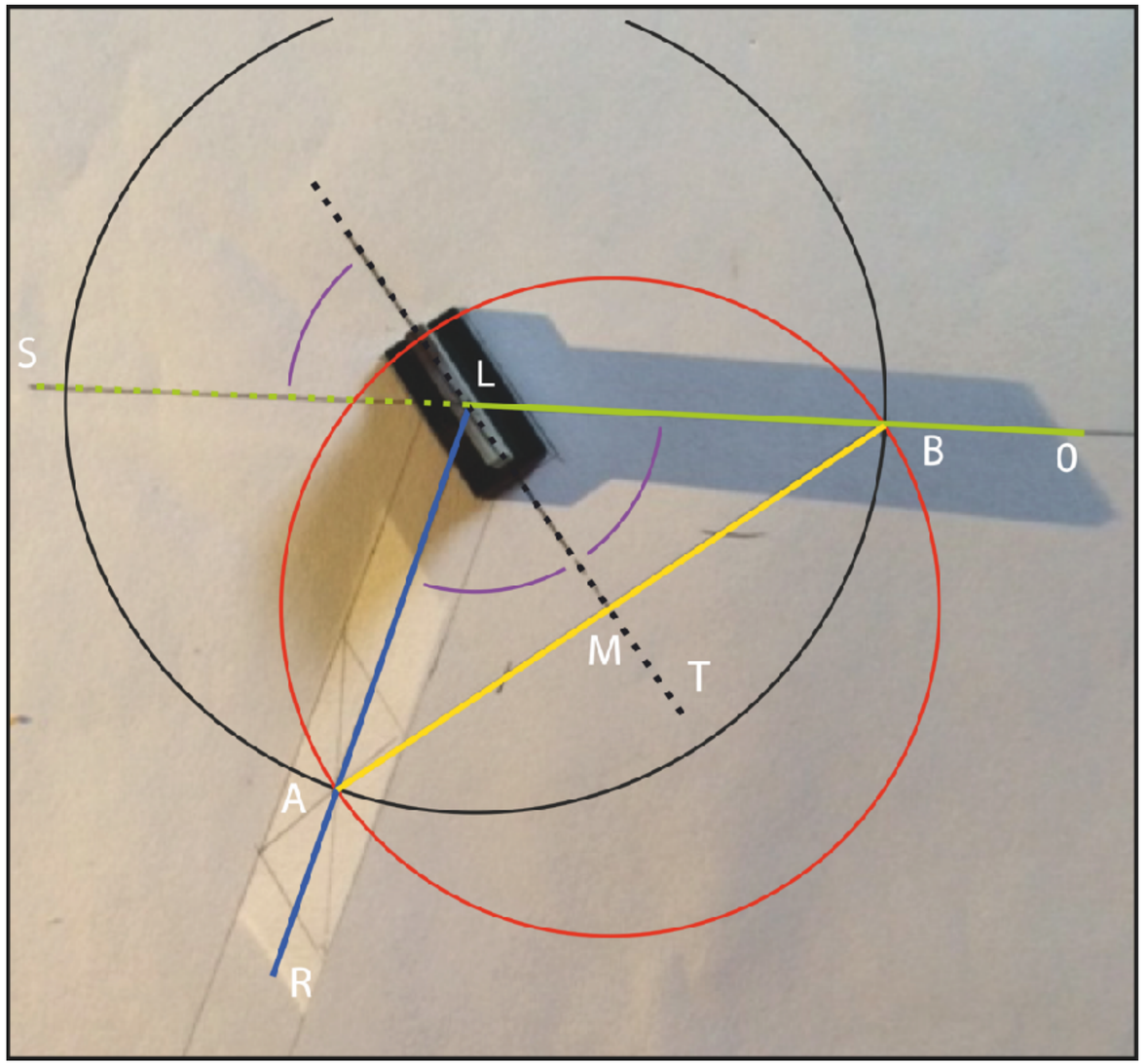
La ley de reflexión en el Liceo

El experimento clásico consiste en utilizar un rayo láser y un círculo graduado. Proponemos aquí sustituirlo por un método que utiliza únicamente el compás y la regla no graduada. Como el objetivo es mostrar la igualdad de los ángulos, no es necesario medirlos. En efecto, basta con utilizar algunos teoremas elementales recogidos en los elementos de Euclides. Se puede argumentar que el método clásico es más directo. El objetivo es que el alumno se familiarice con el razonamiento geométrico aplicado a la interpretación de un resultado experimental. Este experimento, al igual que el clásico, no pretende descubrir la ley de la reflexión, sino sólo verificarla. Más adelante, el experimento propuesto para descubrir la forma de los espejos ardientes permitirá su descubrimiento



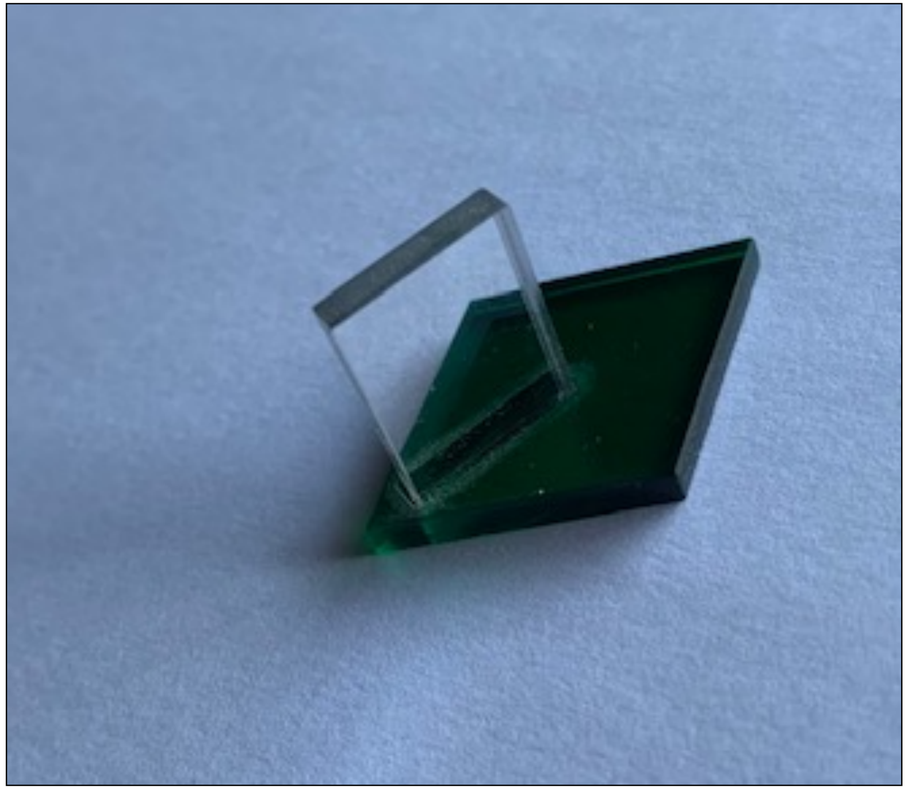
Verificación de la ley de reflexión "con compás y regla"

Un espejo es iluminado por una fuente S en luz rasante. Se coloca a una distancia bastante grande del espejo. En la sombra del espejo se da un punto O, en el centro de su parte transversal. La línea LO representa la dirección del rayo incidente que pasa por L. El rayo reflejado se visualiza directamente por el segmento LR, donde R es un punto situado en el centro de la parte transversal del rayo reflejado. Se dibuja un círculo (en negro) con centro en L. Se corta en LO en B y en LR en A. Se dibuja el segmento AB. La prolongación del espejo LT corta el segmento AB en M. Dibuja la circunferencia (en rojo) centrada en M con radio MA. Comprobamos que pasa por B. M es, por tanto, el centro del segmento AB. Como el triángulo ALB es isósceles, LM es la bisectriz del ángulo ALB. Deducimos así la igualdad de los ángulos en púrpura en la figura, verificando así la ley de la reflexión.



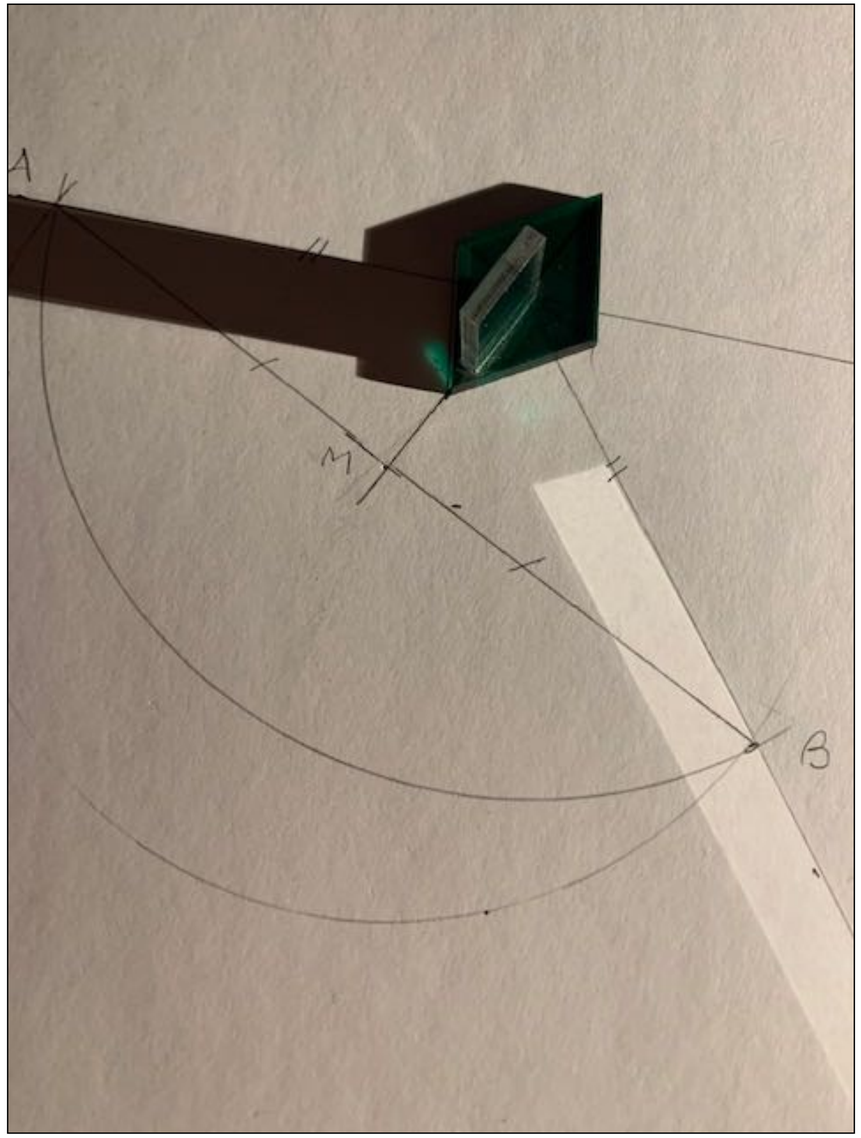
Espejo pequeño sobre un soporte en forma de rombo.

El espejo se coloca sobre el soporte en forma de rombo en una de sus diagonales. Uno de sus extremos coincide con el centro del rombo. Es el rayo de luz que pasa por este extremo lo que nos interesa. La elección de la forma de rombo del soporte permite trazar fácilmente el eje del espejo.

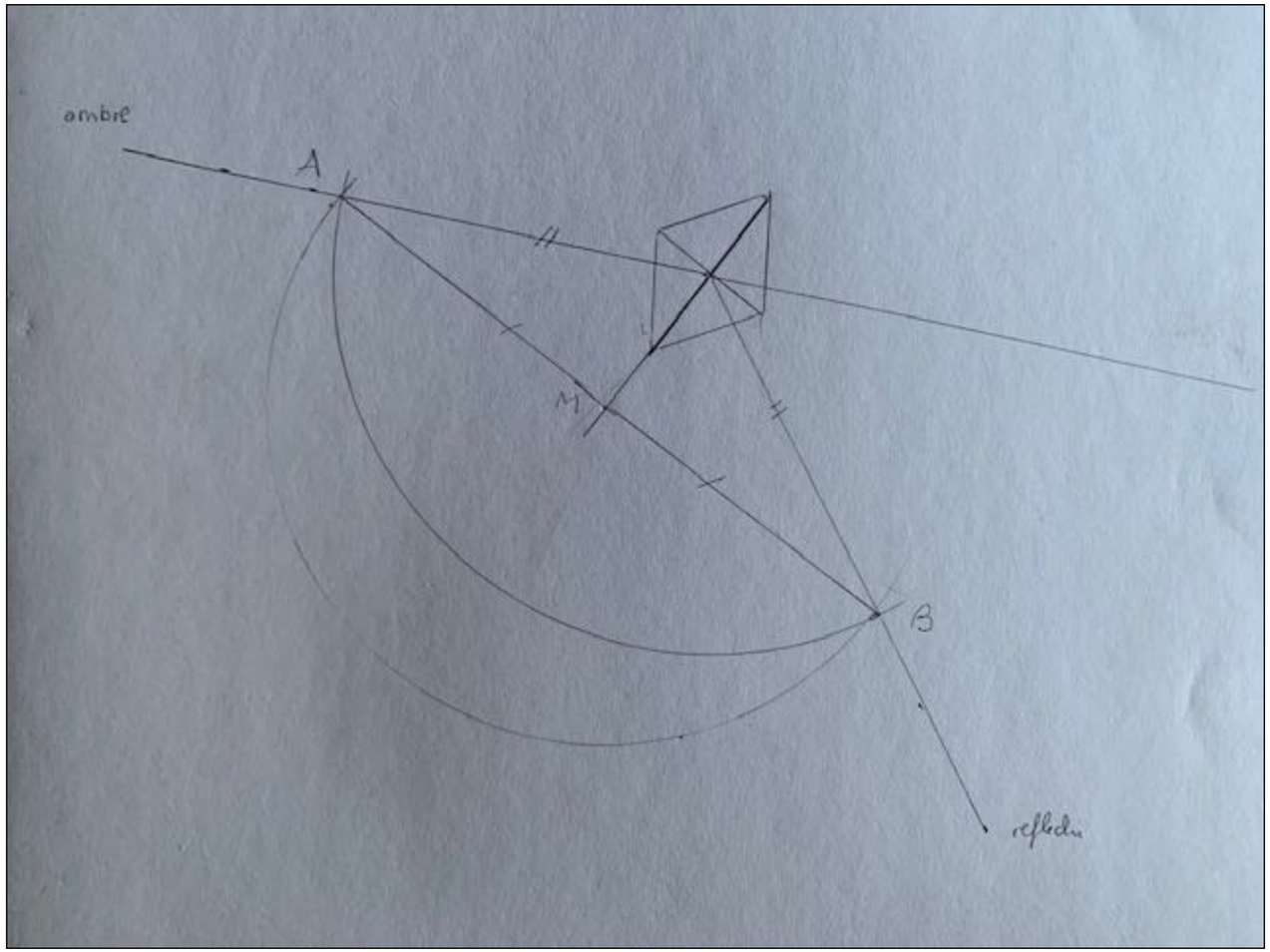


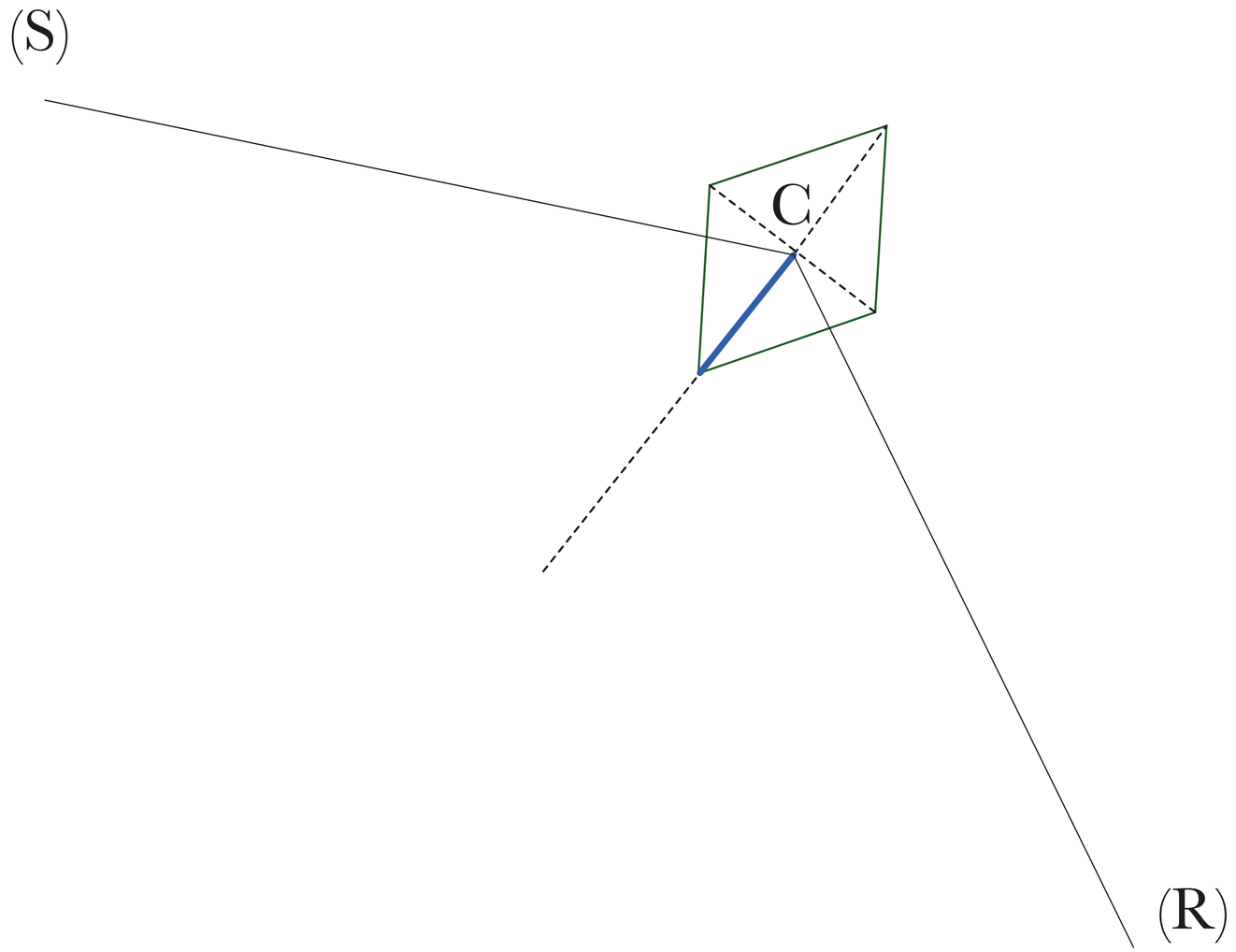
Euclides, Libro I, Definición XXXIII

El espejo se ilumina con una fuente de luz de bajo ángulo.
Se dibujan el final de la sombra proyectada y el final del rayo reflejado.



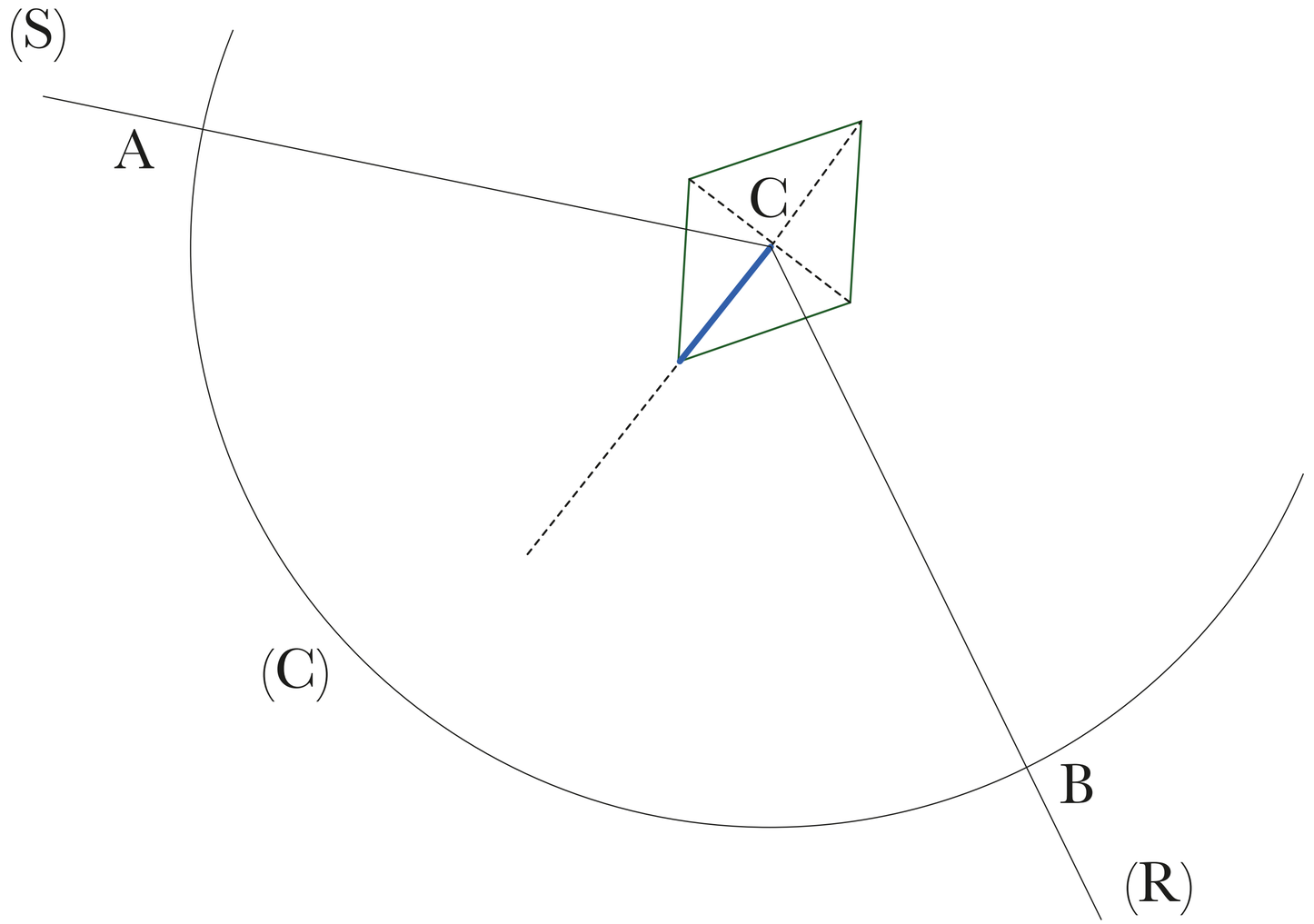
Utilizando el compás y la regla (no graduada), se muestra la igualdad de los ángulos entre el rayo reflejado, el rayo incidente y el espejo.





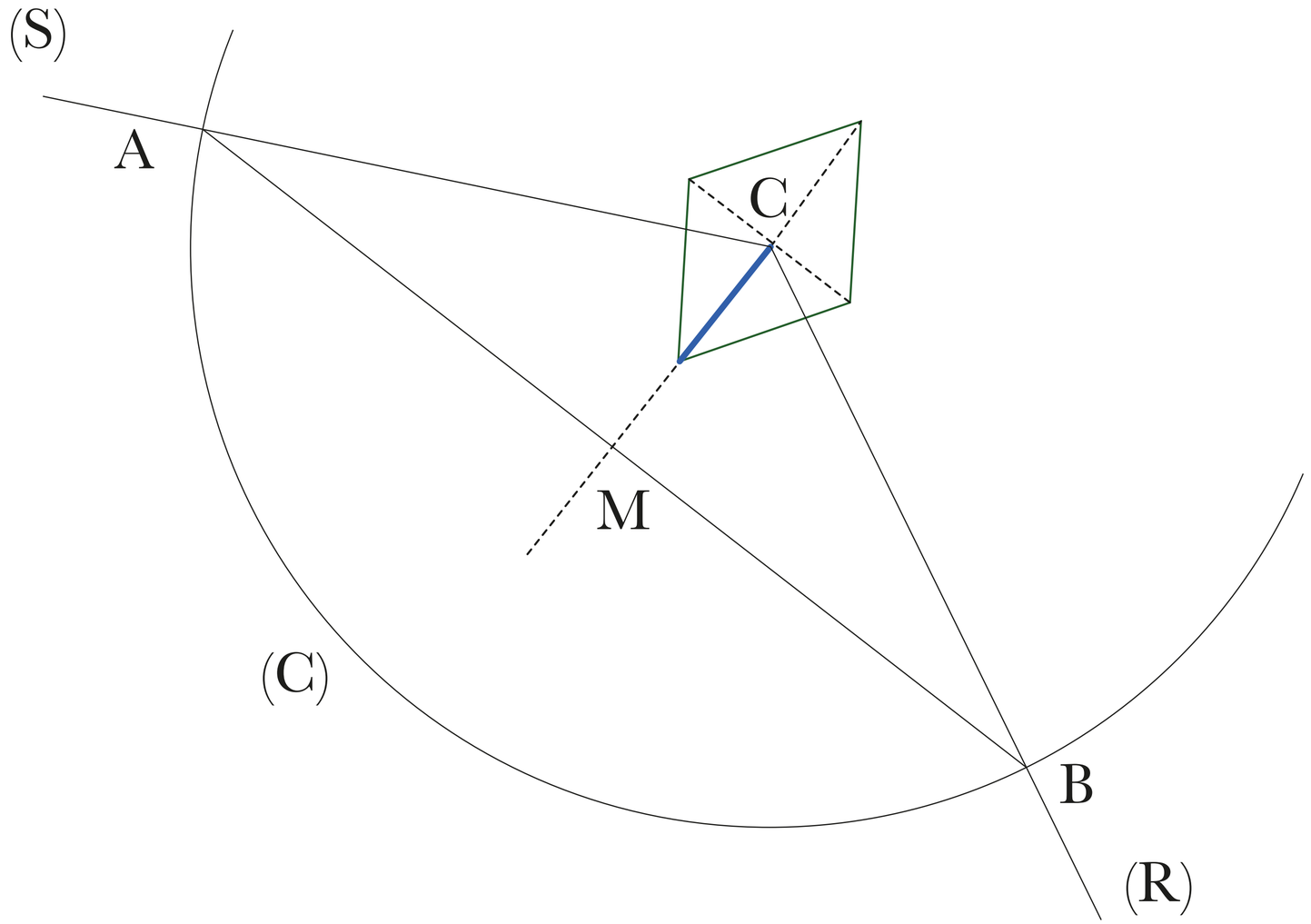
Esta secuencia de figuras describe en detalle el razonamiento geométrico.

Se dibuja una circunferencia (C) con centro C. Esta interseca (S) y (R) en A y B respectivamente (CA=CB).



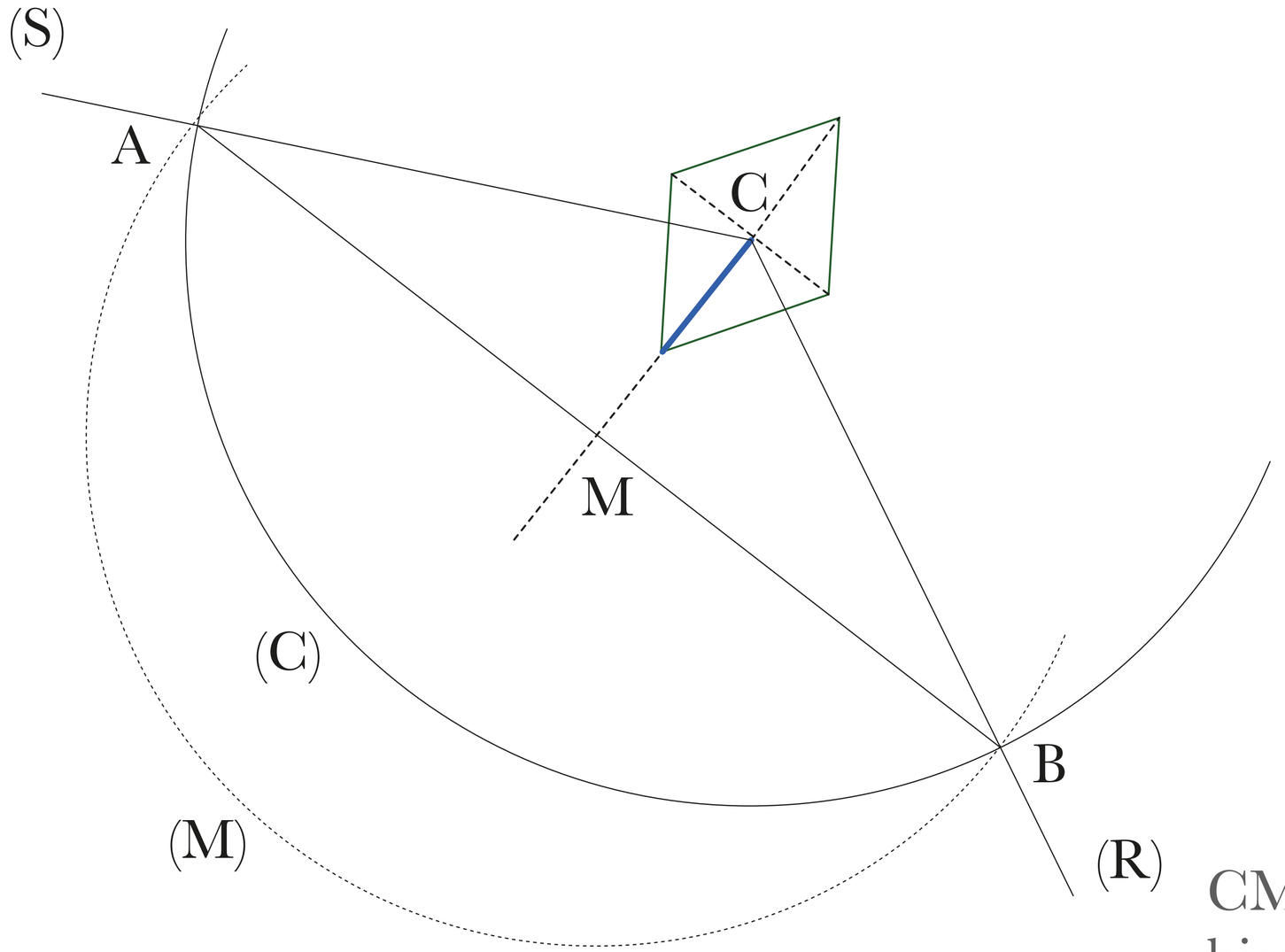
Euclides, Libro I, Definición XV

Se dibuja el segmento de línea AB. Corta el eje del espejo en M. El triángulo ABC es isósceles.



Euclides, Libro I, Definición XXV

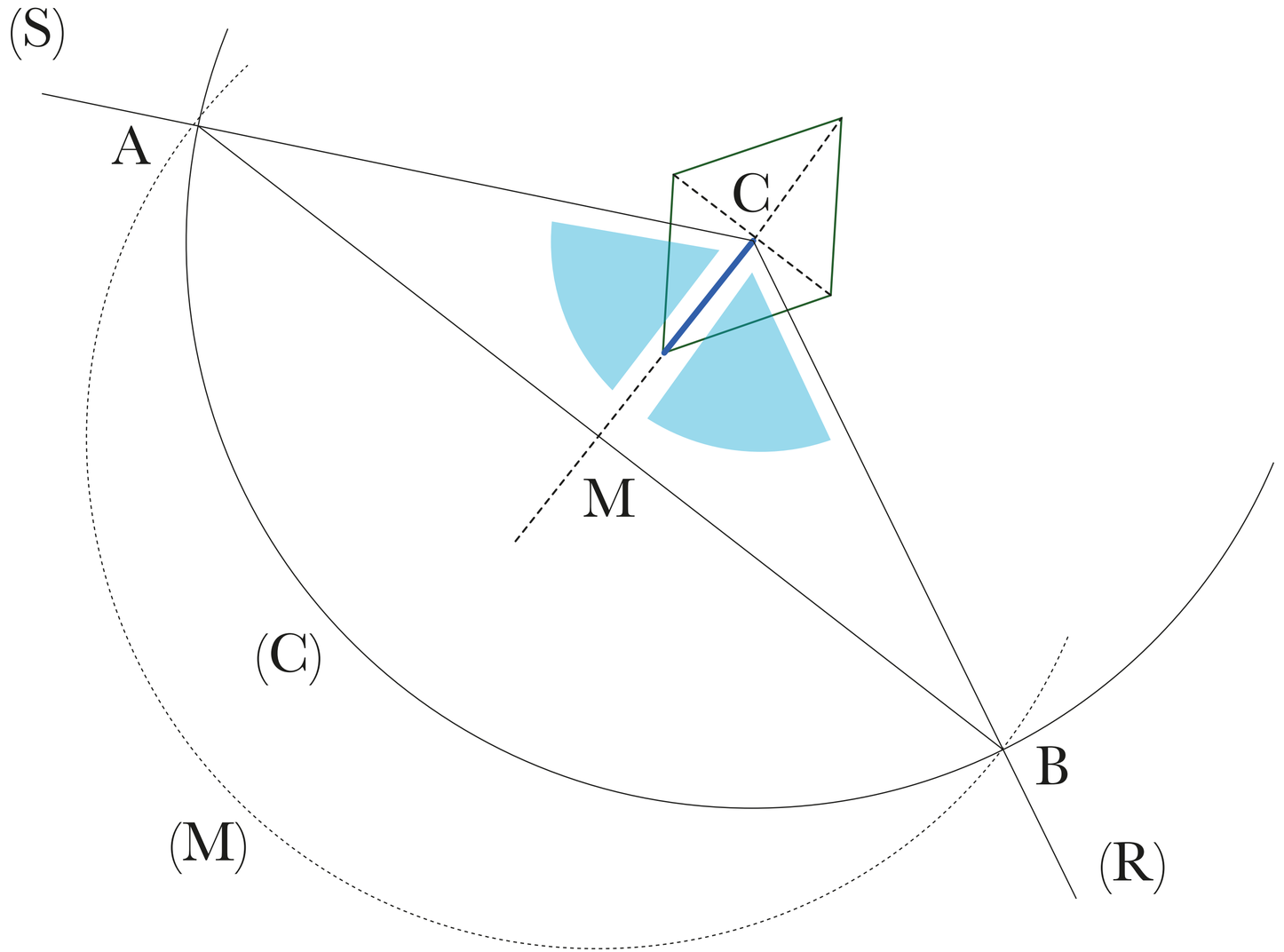
Se dibuja el círculo (M) con centro M y radio MB.
Se puede ver que pasa (aproximadamente) por A. Por tanto, MA = MB.



Euclides, Libro I, Proposición V, Teorema

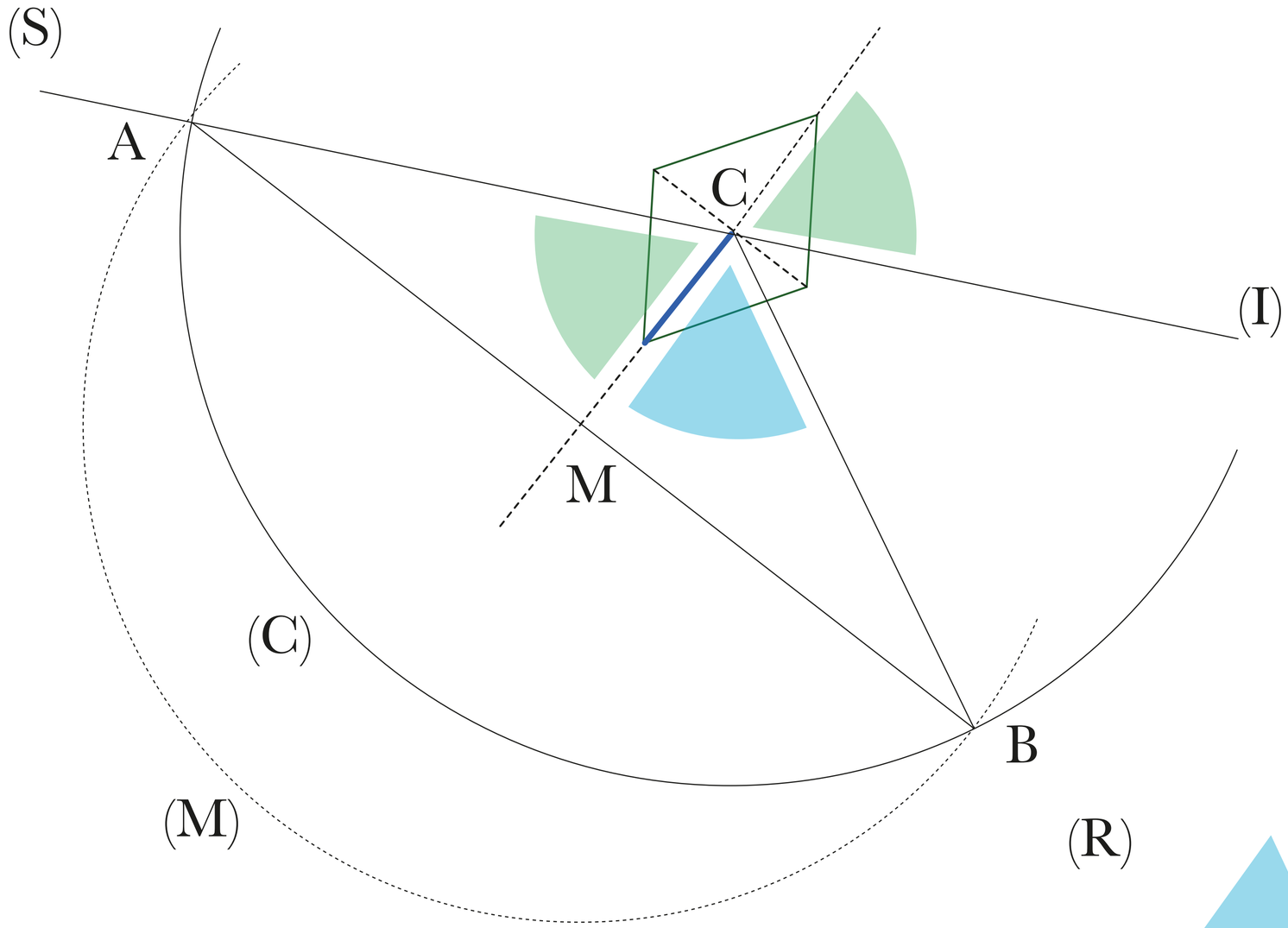
CM es, por tanto, la bisectriz del triángulo isósceles.

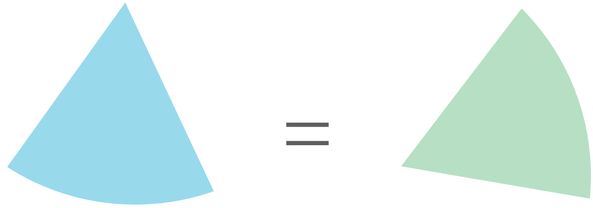
Por lo tanto, los ángulos ACM y BCM son iguales



Euclides, Libro I, Proposición V, Teorema

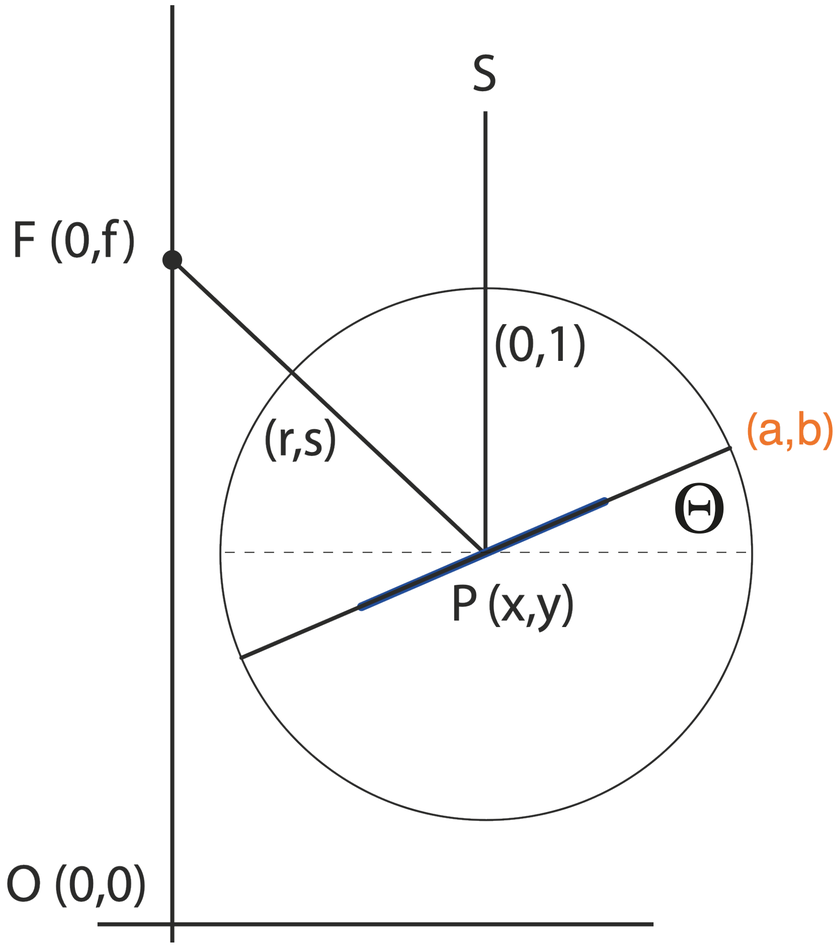
El rayo incidente se traza extendiendo AC más allá de C.





Euclides, Libro I, Proposición XV, Teorema

¡Cálculo del ángulo como se hace en el primer año de universidad utilizando los métodos de la geometría analítica de Descartes!



$$r = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + (f-y)^2}}$$

$$s = \frac{f-y}{\sqrt{x^2 + (f-y)^2}}$$

$$(r,s).(-a,-b) = (0,1).(a,b)$$

$$-ra - sb = b$$

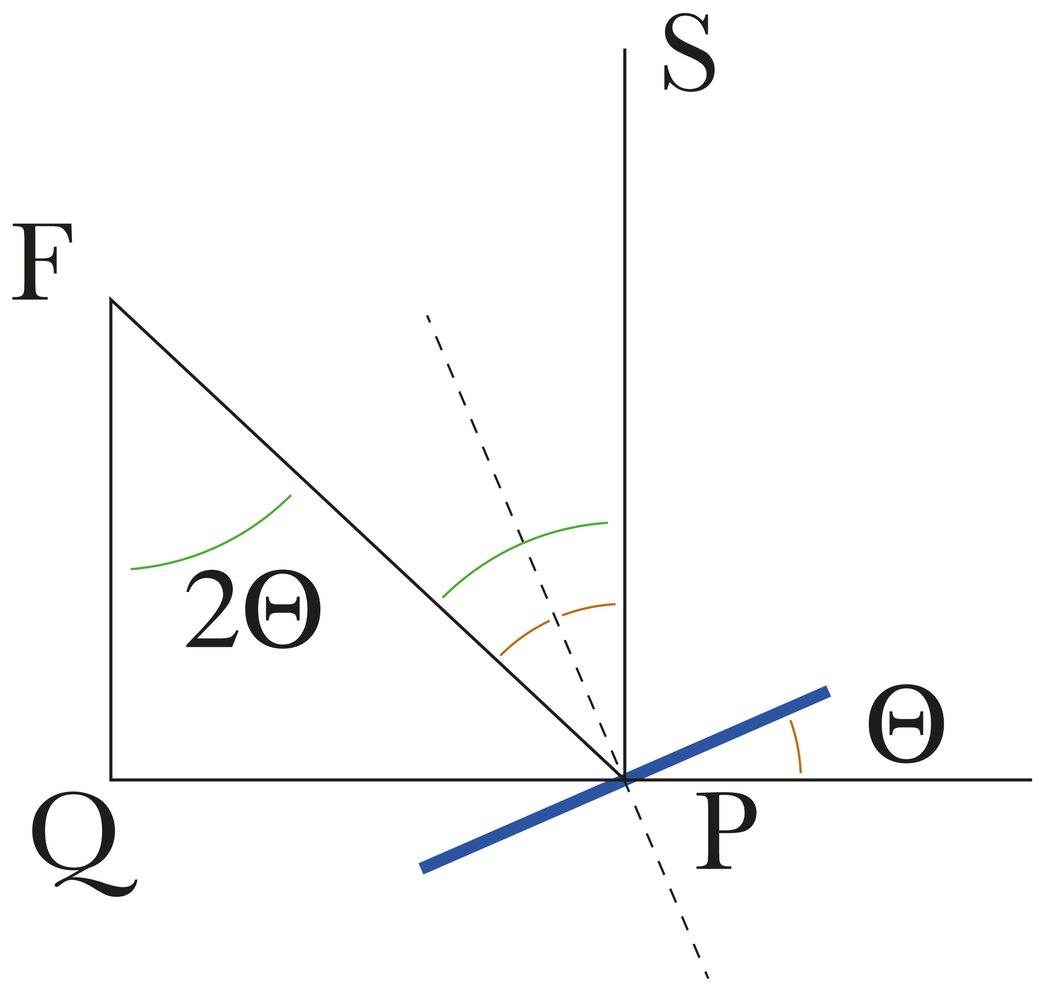
$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a = \frac{f - y + \sqrt{x^2 + (f-y)^2}}{\sqrt{2}x} \sqrt{1 + \frac{f-y}{\sqrt{x^2 + (f-y)^2}}}$$

$$b = \frac{\sqrt{1 + \frac{f-y}{\sqrt{x^2+(f-y)^2}}}}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(\Theta) = \frac{x}{f - y + \sqrt{(f-y))^2 + x^2}}$$

Un método trigonométrico más elegante.



$$\cos(2\Theta) = \frac{FQ}{FP}$$

$$\cos(2\Theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$$

$$\cos(\Theta) = \frac{\sqrt{FP + FQ}}{2FP}$$

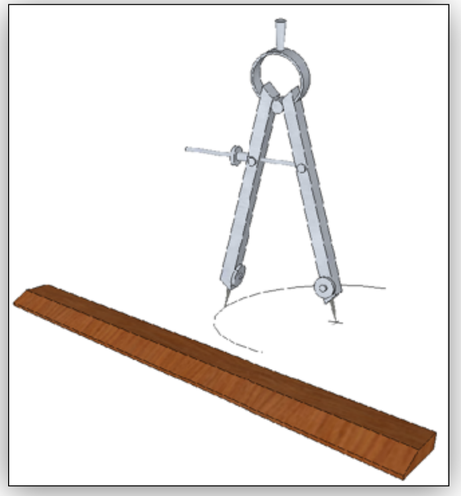
$$\sin(2\Theta) = \frac{PQ}{PF}$$

$$\sin(2\Theta) = 2\sin(\Theta)\cos(\Theta)$$

$$\sin(\Theta) = \frac{PQ}{2PF}\sqrt{\frac{2PF}{PF + QF}}$$

$$\tan(\Theta) = \frac{PQ}{PF + QF}$$

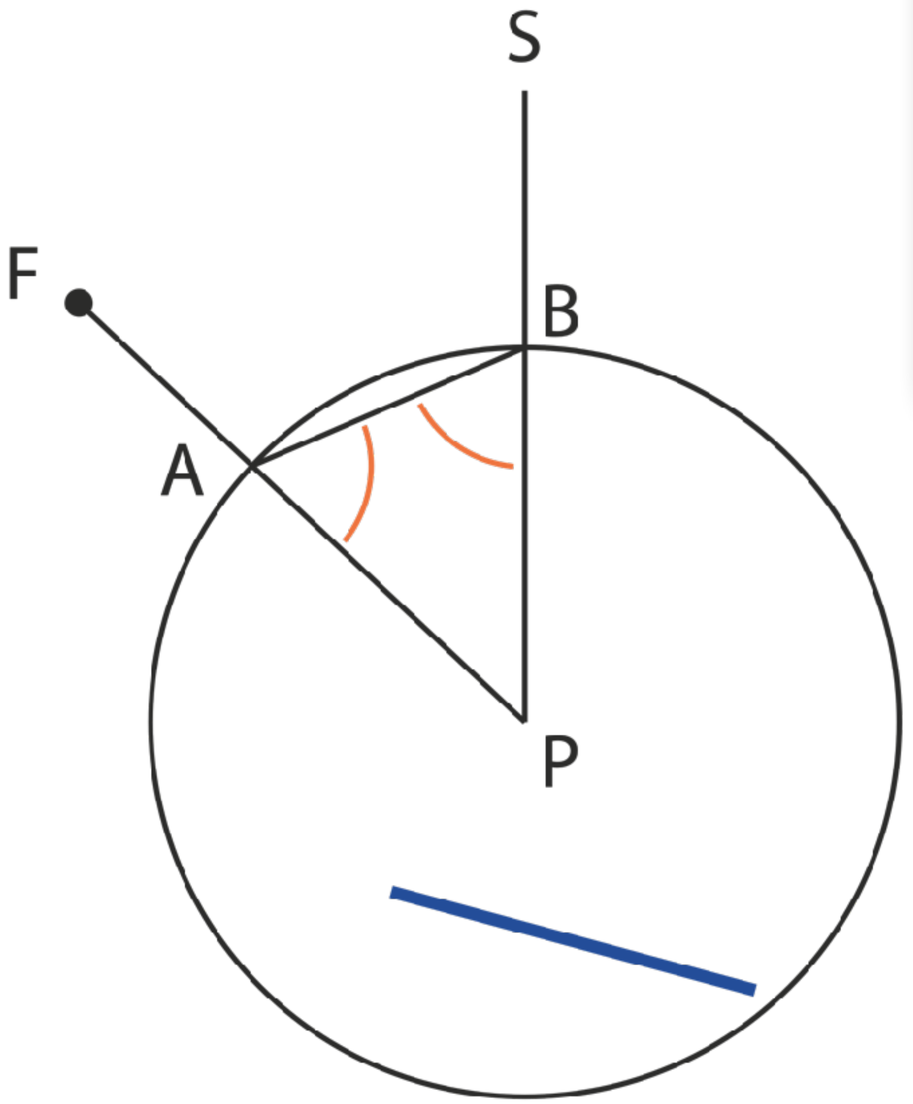
El método euclidiano, con "compás y regla"



Dibujamos el círculo con centro P, radio PA<PF. Tenemos PA=PB (Euclides, Libro I, Definición XV). A y B son respectivamente la intersección del círculo con los rayos reflejados e incidentes.

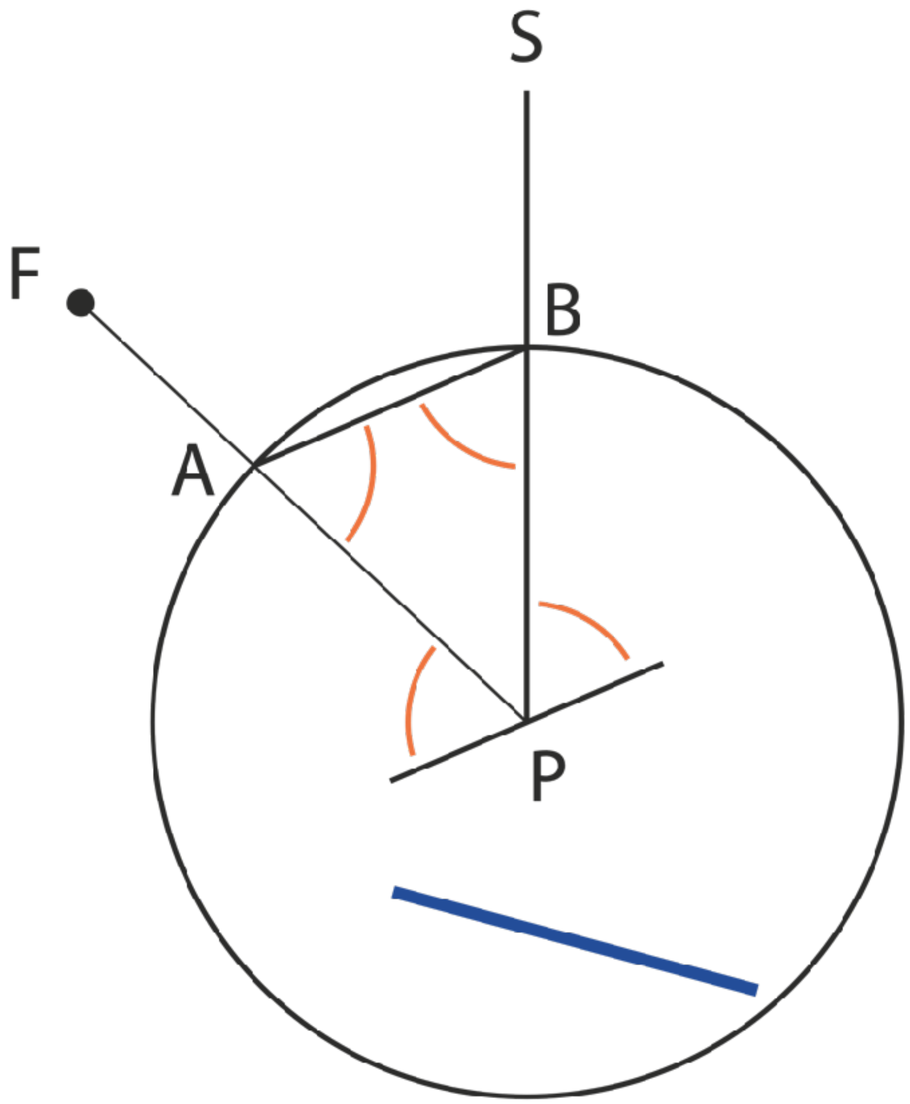
El triángulo APB es isósceles (Euclides, Libro I, Definición XXV).

Los ángulos en las bases son iguales (Euclides, Libro I, Proposición V, Teorema).



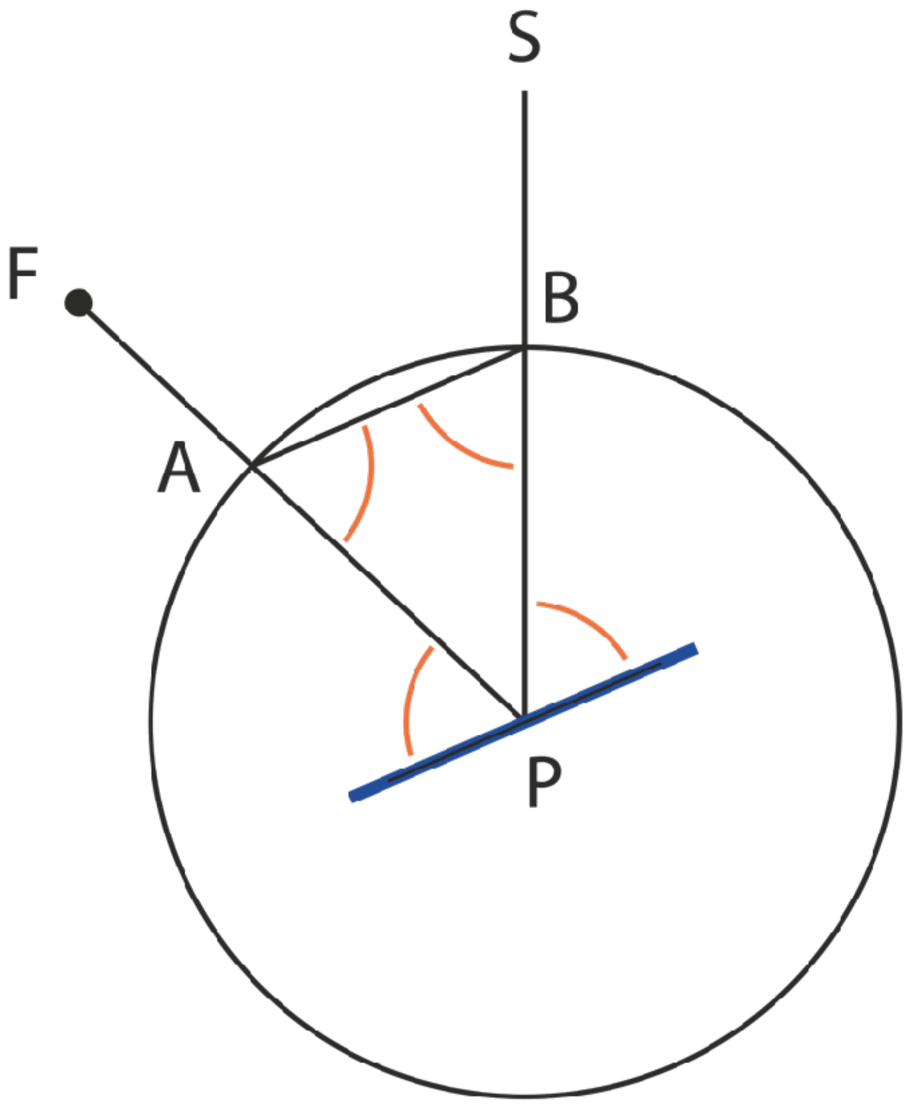
Se traza la paralela a AB por P (Euclides, Libro I, Proposición XXXI, Problema).

Los ángulos mostrados en rojo en la figura son iguales (Euclides, Libro I, Proposición XXIX, Teorema).

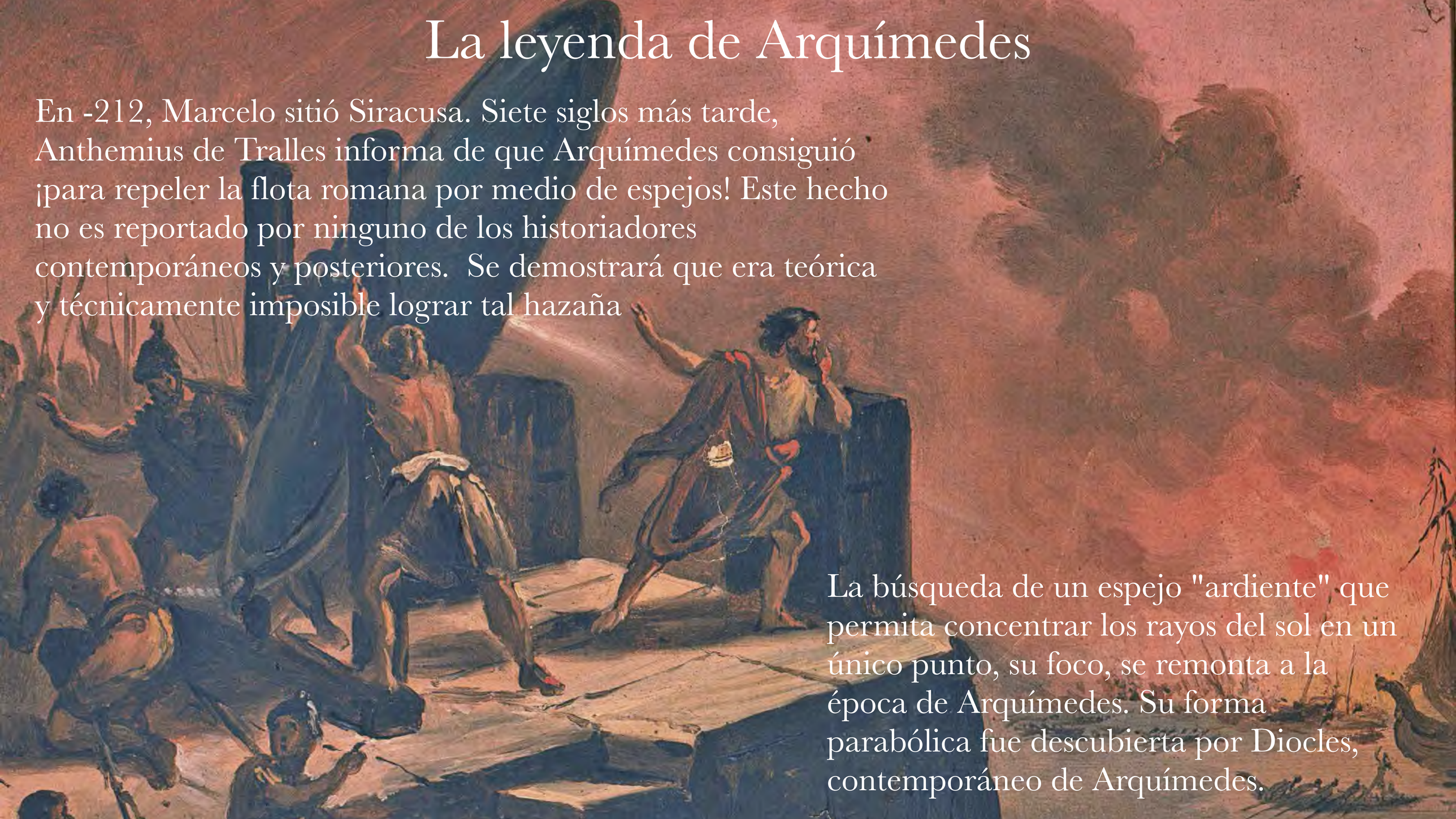


Por lo tanto, el espejo que cumple la condición de reflexión debe colocarse en la paralela a AB por P.

La "condición de reflexión" se cumple para el punto P, aquí en el centro del espejo.



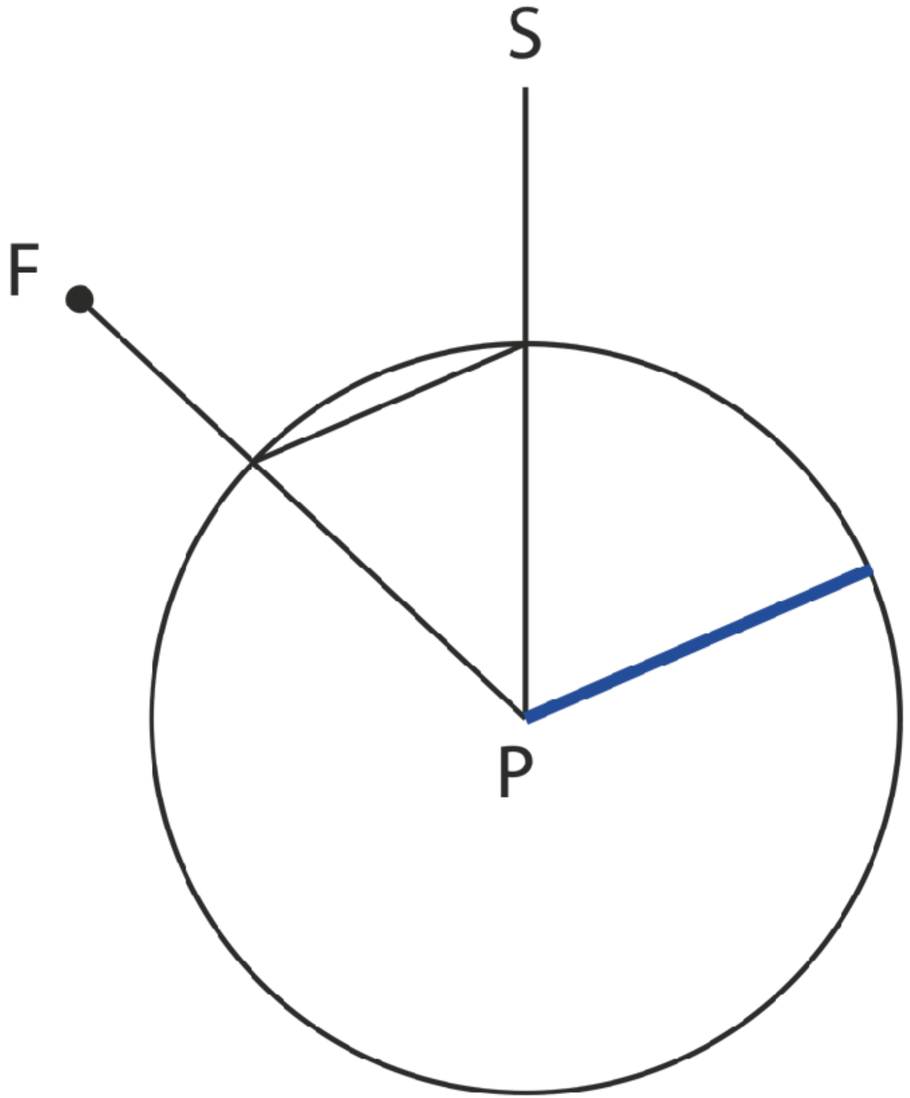
La leyenda de Arquímedes



En -212, Marcelo sitió Siracusa. Siete siglos más tarde, Anthemius de Tralles informa de que Arquímedes consiguió ¡para repeler la flota romana por medio de espejos! Este hecho no es reportado por ninguno de los historiadores contemporáneos y posteriores. Se demostrará que era teórica y técnicamente imposible lograr tal hazaña

La búsqueda de un espejo "ardiente" que permita concentrar los rayos del sol en un único punto, su foco, se remonta a la época de Arquímedes. Su forma parabólica fue descubierta por Diocles, contemporáneo de Arquímedes.

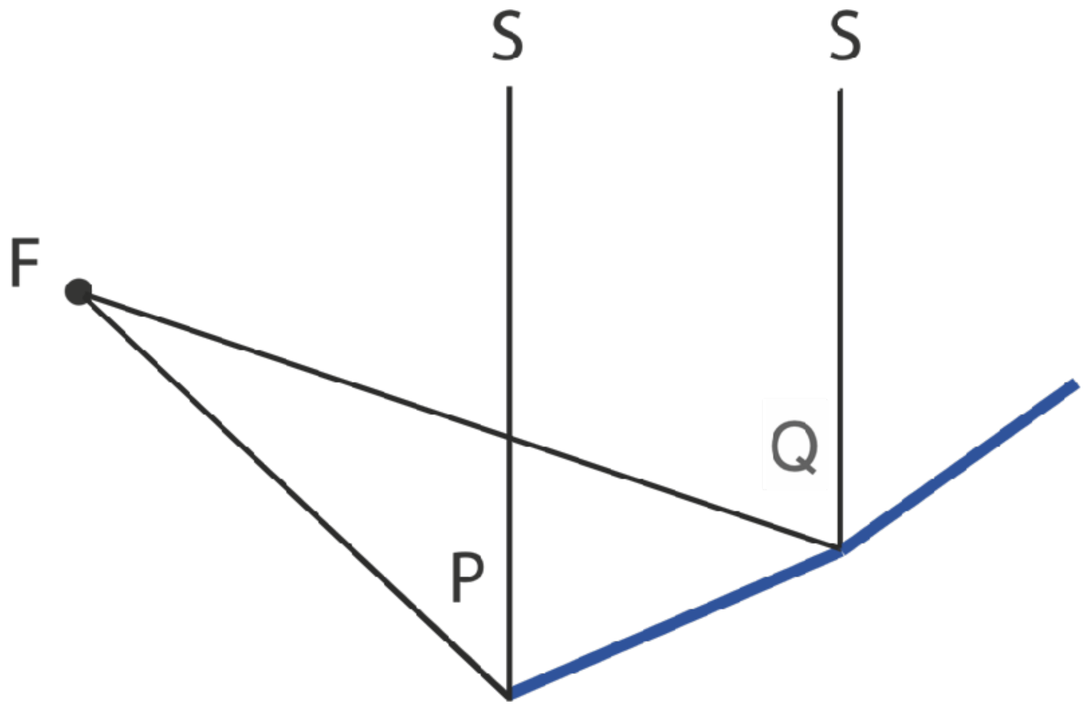
Busca el "Espejo Ardiente" que recoge todos los rayos del sol en su foco F.



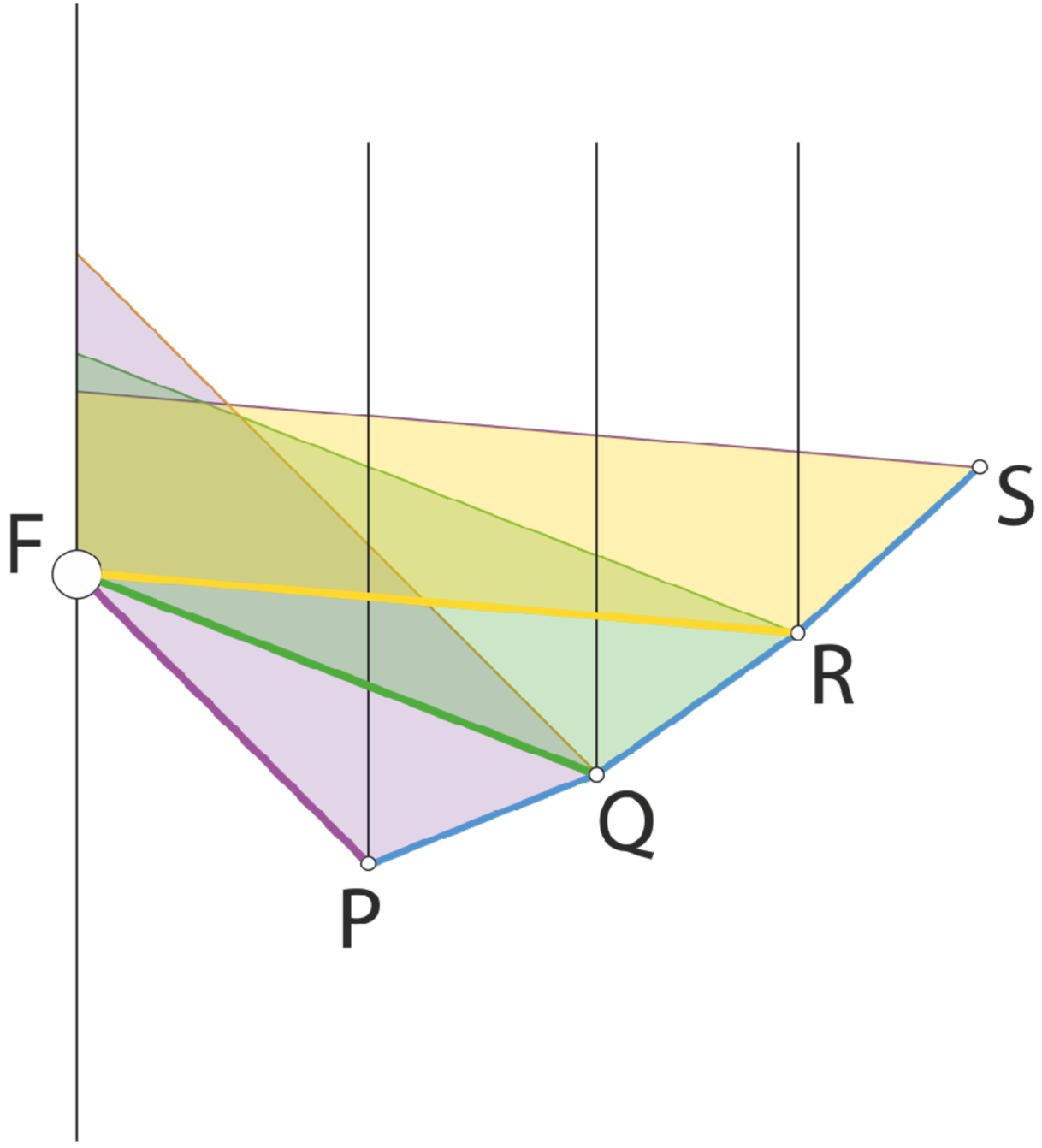
La idea es simplemente colocar "pequeños" espejos uno al lado del otro para dirigir los rayos del sol hacia un punto F determinado.

El primer espejo se coloca de forma que su extremo izquierdo refleje el rayo SP en F.

El segundo espejo se coloca de forma que su extremo izquierdo Q, coincida con el extremo derecho del primer espejo. Su orientación está definida por la misma construcción que la del primer espejo.



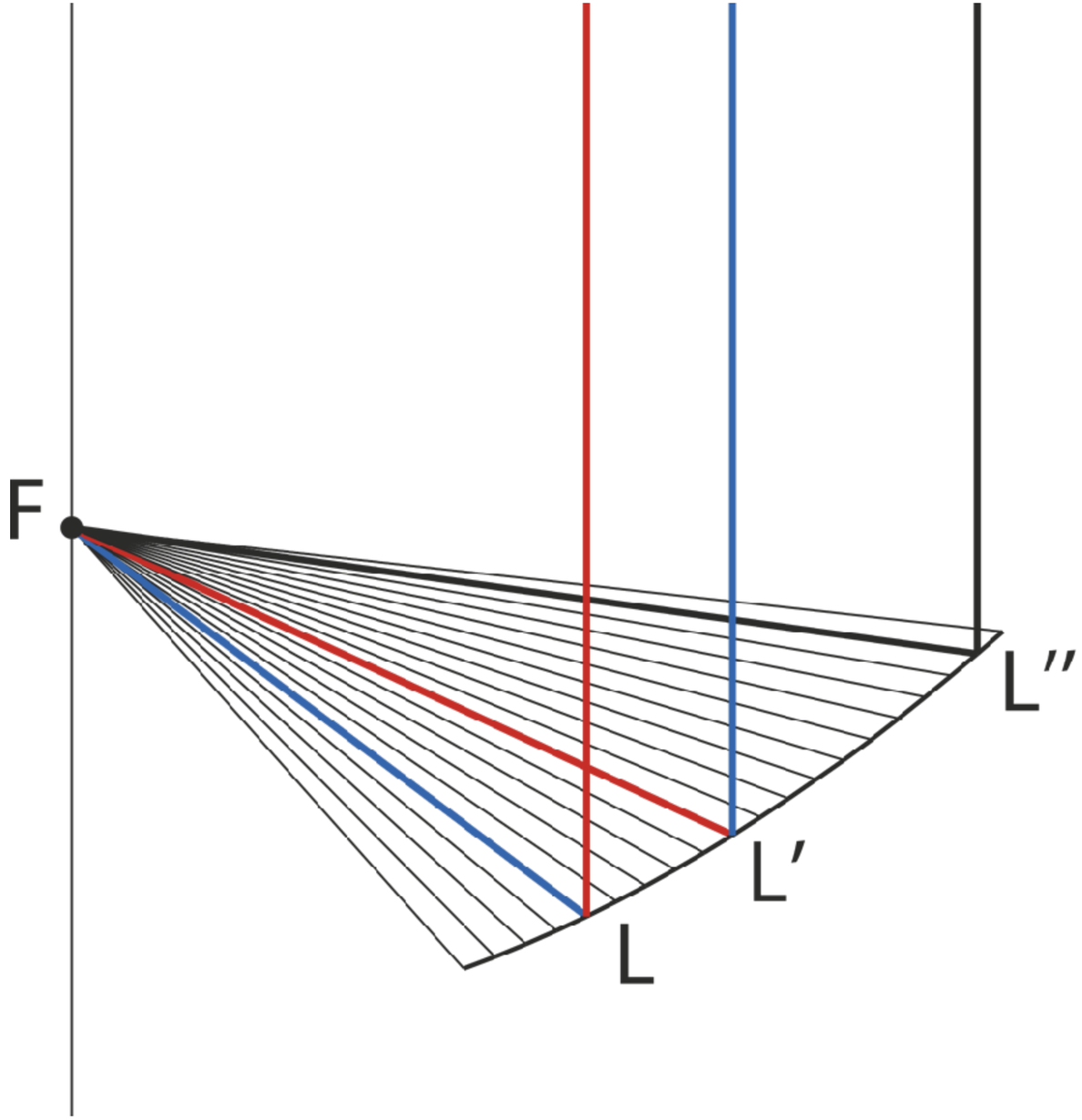
Los extremos izquierdos P, Q, R de los tres primeros espejos reflejan los rayos del sol hacia F.



Construcción de los primeros 20 espejos con "compás y regla".

Se han explicado los rayos para tres puntos L, L' y L".

La línea discontinua obtenida es la aproximación de una curva que parece el arco de una parábola



Pero, ¿qué es una parábola?

En la escuela secundaria es

$$y = x^2$$

En la Universidad es

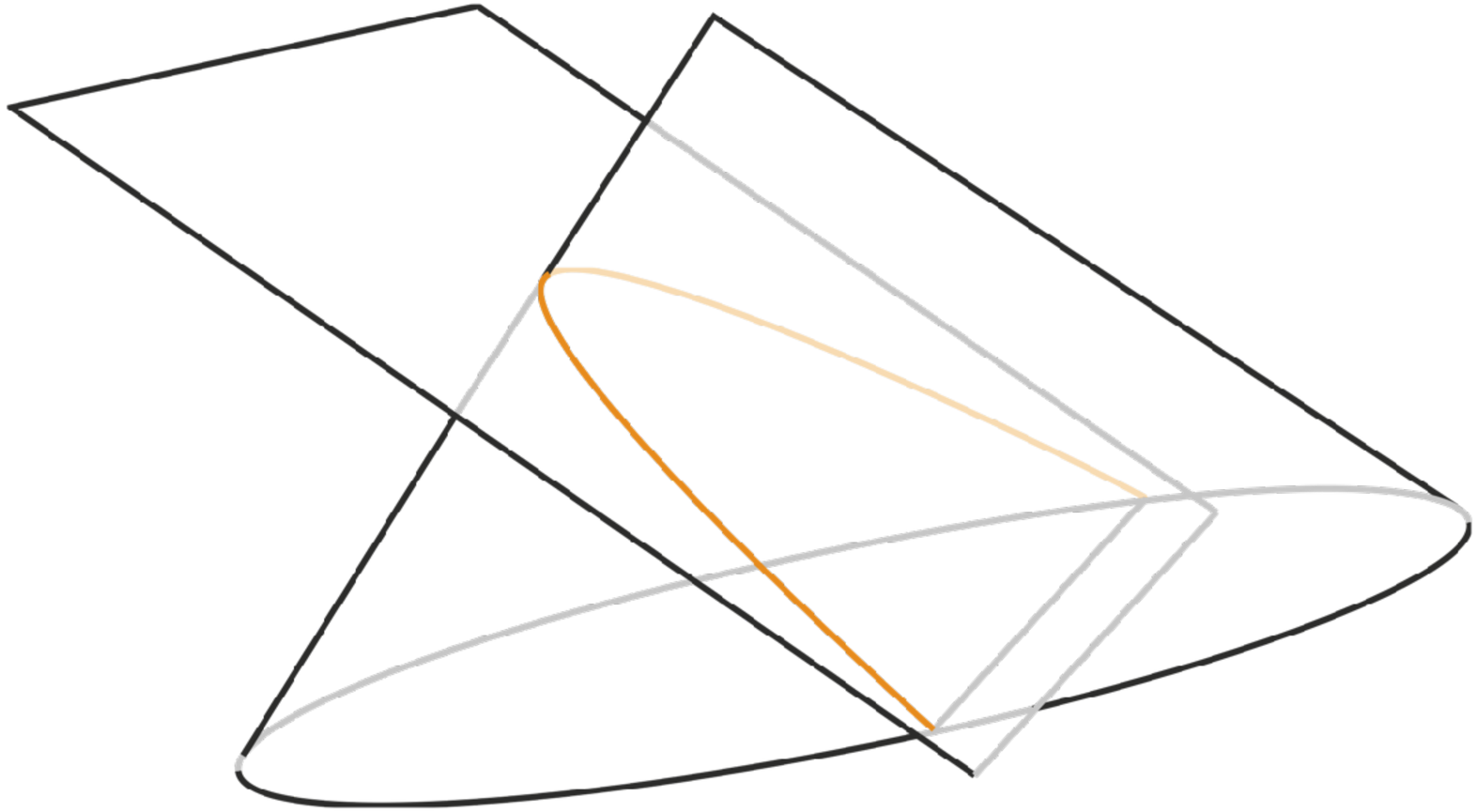
el caso especial de una
ecuación cuadrática general

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

en el caso de que

$$b^2 - 4ac = 0$$

La definición histórica de la parábola

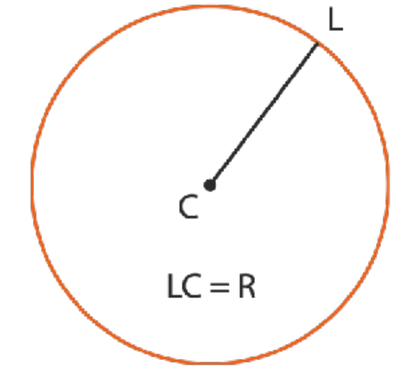


Intersección de un cono "derecho" y un plano paralelo a su generatriz

Menechme, contemporáneo y amigo de Aristóteles, profesor de matemáticas de Alejandro Magno

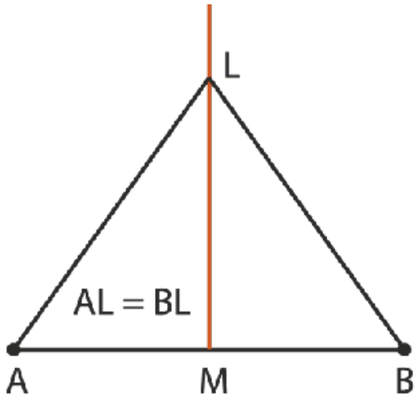
Tres " lugares " clásicos de los puntos equidistantes .

desde un punto C



El círculo

de dos puntos
A y B



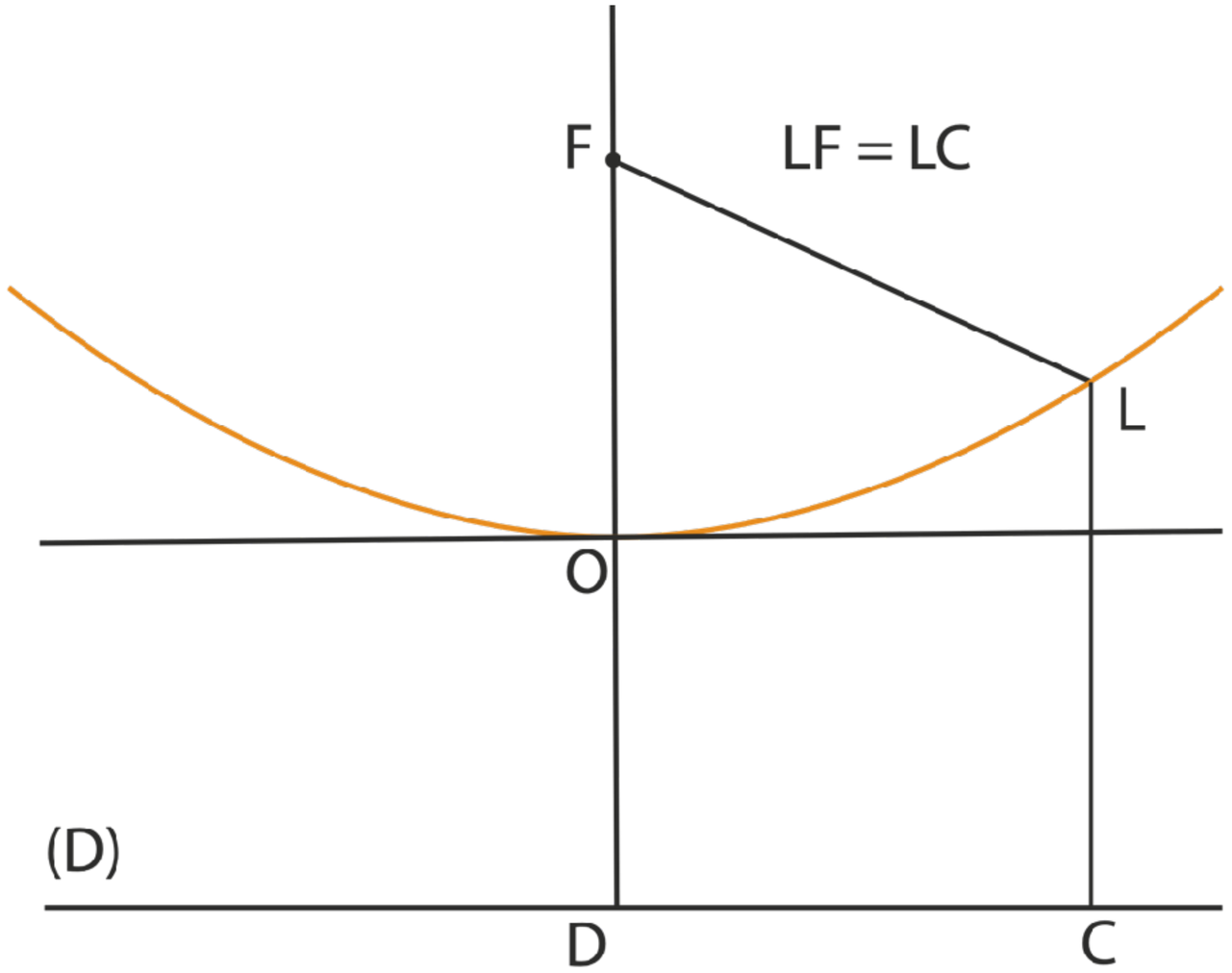
La bisectriz perpendicular del segmento AB

de una línea dada (D) que pasa por un punto L



La línea paralela a (D) que pasa por L

La parábola como lugar de los puntos ...



... equidistante de un punto F y una línea (D)

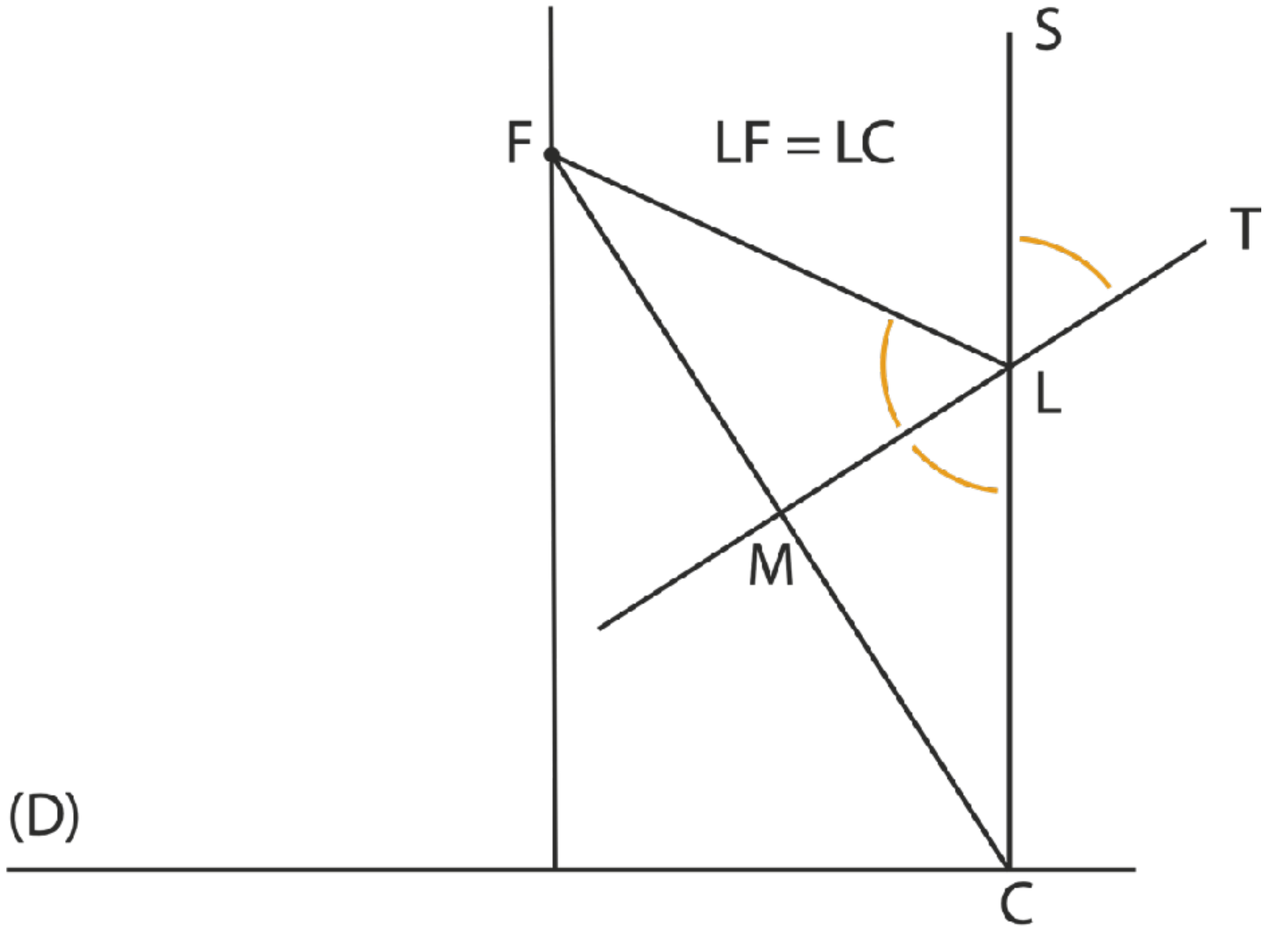
Diocles, contemporáneo de Arquímedes

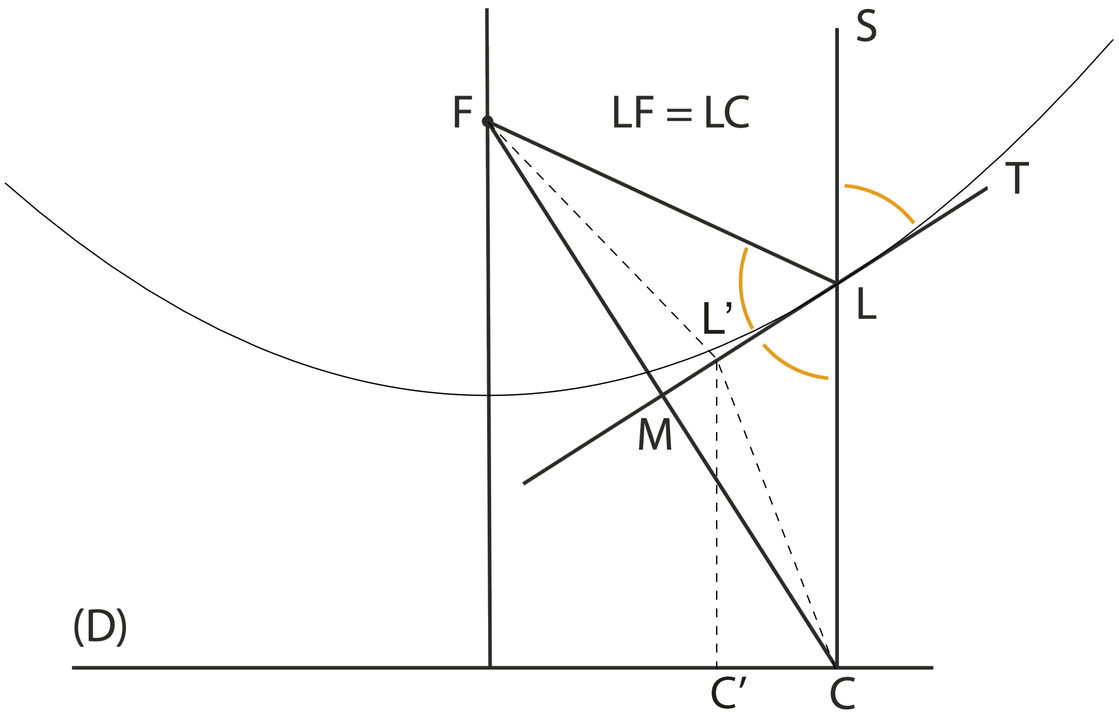
Construcción del lugar de los puntos que equidistante de un punto y de una recta utilizando un compás y una regla

Une F con cualquier punto de (D)
Dibuja la bisectriz MT del segmento FC
Dibuja la perpendicular CS en C a la línea

La intersección L de la bisectriz MT y la perpendicular CS pertenece a la parábola, ya que por definición de la bisectriz LF=LC

Nota importante: los ángulos marcados en rojo en la figura son iguales.
Así, un espejo cuyo centro está situado en L, orientado a lo largo de la línea media MT refleja un rayo solar SL en F



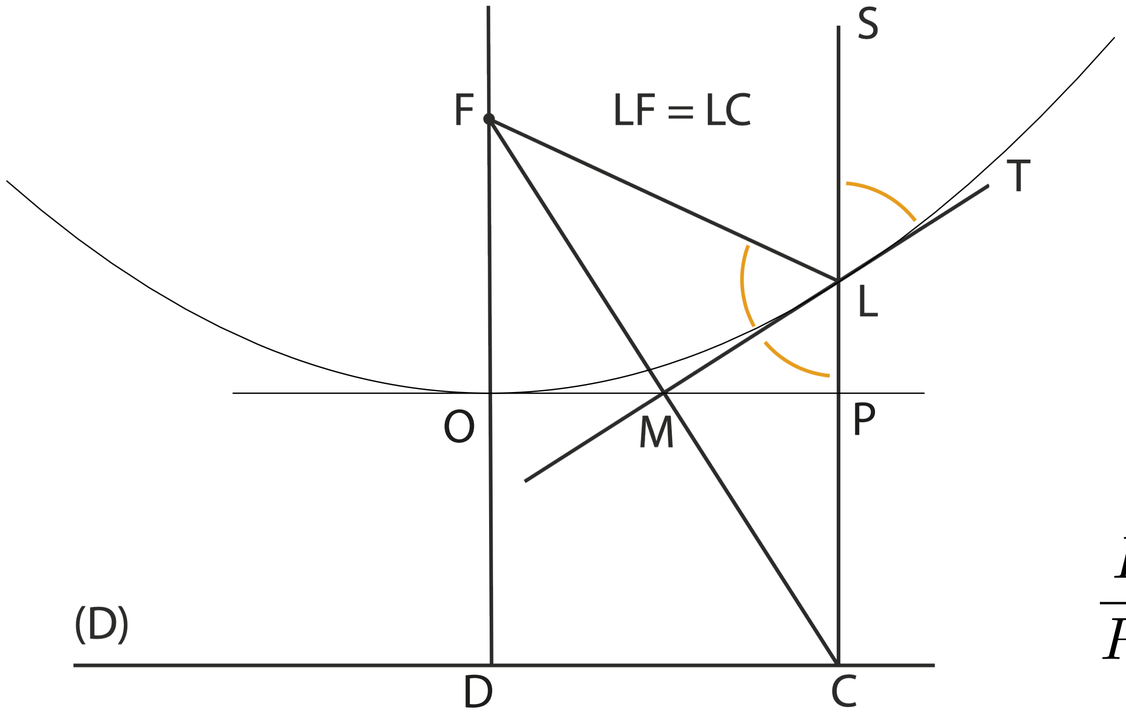


$$FL' = L'C$$

$$L'C > L'C'$$

ML es la tangente en L a la parábola. En efecto, si tomamos cualquier punto L' de la recta MT, tenemos FL'-FC'>0, lo que demuestra que la recta está en el mismo lado de la curva definida por FL-FC=0. Toca la parábola en L donde FL'-FC' alcanza su mínimo FL-FC=0. Más adelante se hará una demostración más intuitiva de esta propiedad.

Conexión con la definición algebraica de la parábola



OP es la paralela a (D) por M. FD es la perpendicular a (D) por F. OM=MP. Los triángulos FDC y MPL son similares. Sea OF=f , OP=x y PL=y.

$$\frac{LP}{PM} = \frac{DC}{FD}$$

$$LP = \frac{OP^2}{4OF}$$

$$y = \frac{1}{4f}x^2$$

Comprobemos en la construcción de los 20 espejos que la curva es aproximadamente una parábola.

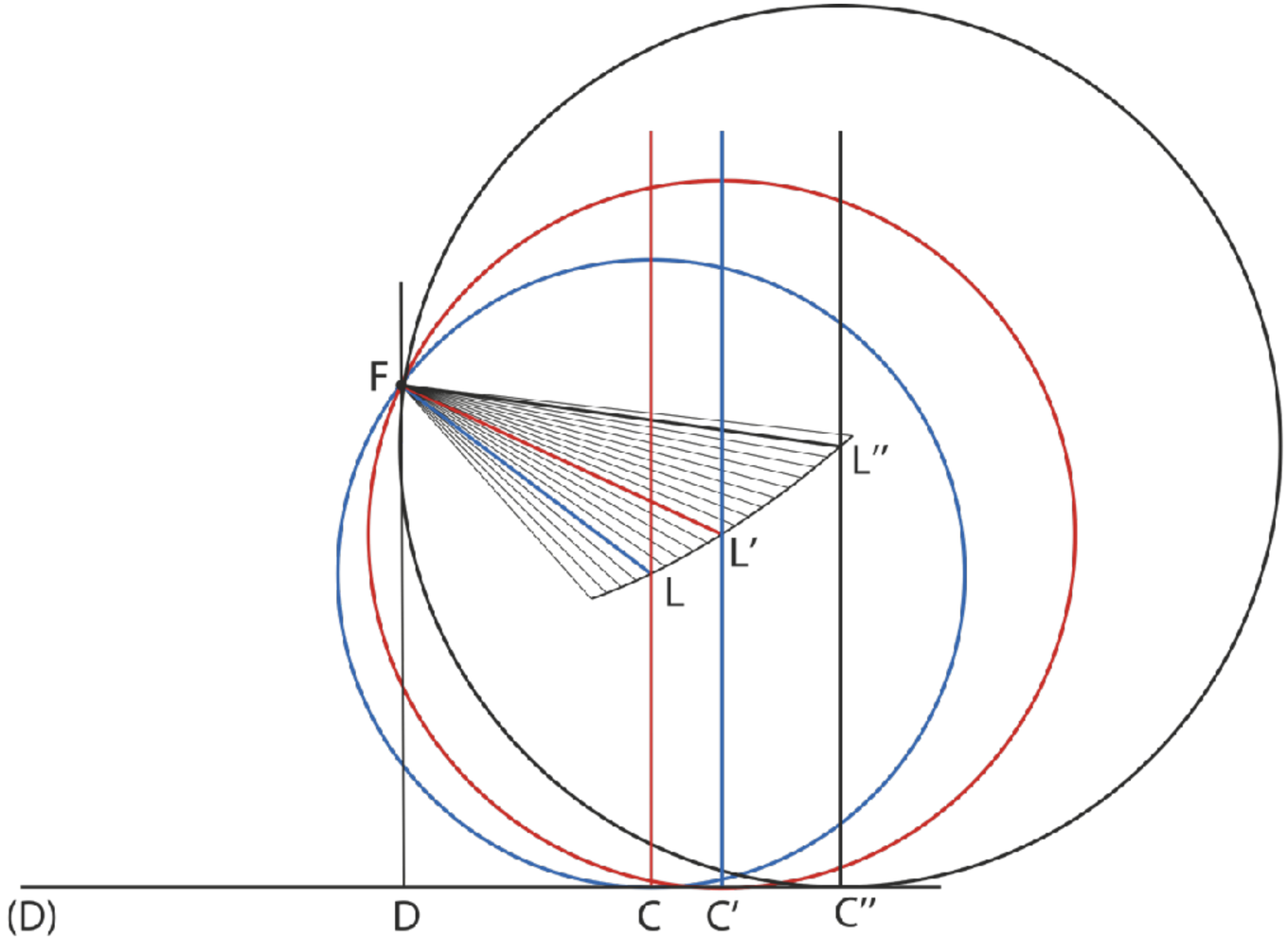
Consideremos dos puntos cualesquiera de la construcción L y L'.

Dibuja las verticales a través de L y L'.

Dibuja las circunferencias con centros L y L' y radios LF y L'F.

Determina los puntos C y C' tales que LF=LC y L'F=L'C'.

Comprueba (aproximadamente) que la recta (D) que pasa por C y C' es perpendicular al eje vertical.

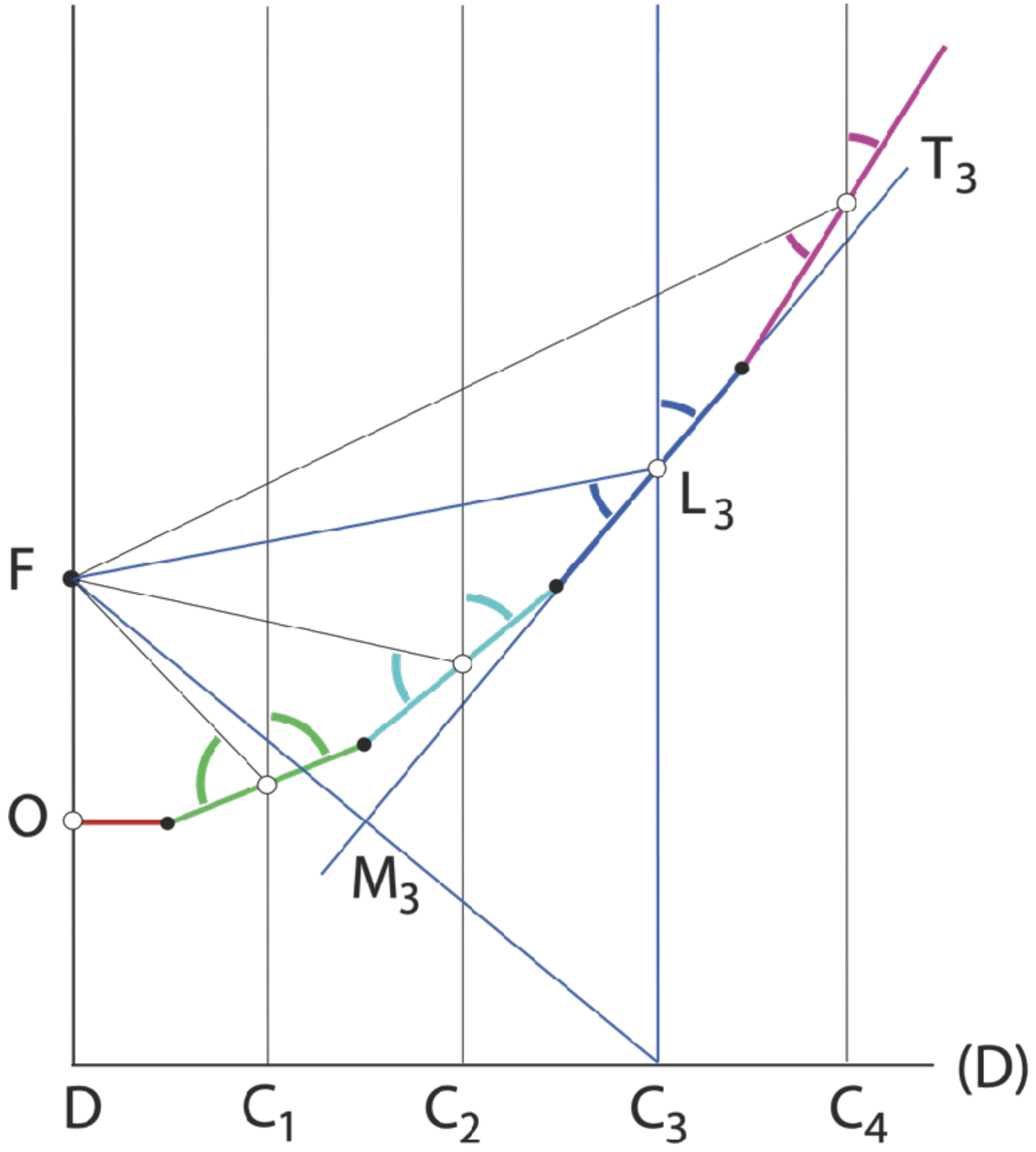


Por lo tanto, L y L' son equidistantes de (D) y F. El mismo resultado se obtiene con cualquier otro punto L"

Esta construcción "Compás y Regla" puede interpretarse como la solución gráfica de una ecuación diferencial cuya solución exacta es una parábola. En la jerga de las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales, se trata de un método explícito cuya convergencia a la solución exacta requiere un "paso de integración" muy pequeño (en este caso, la longitud del espejo elemental). Veremos a continuación que el experimento propuesto para descubrir la parábola corresponde a un método de integración implícita cuya convergencia a la solución exacta es mucho mejor.

La construcción de Anthemius de Tralles

A Anthemius se le da un punto F y una línea (D). En esta línea, damos una serie de puntos C1, C2, C3, C4, ... Se construyen los puntos de la parábola L1, L2, L3, L4. La construcción explícita se ilustra en el caso de L3. Las mediatrices de dos puntos sucesivos se encuentran entre estos puntos (los discos negros de la figura). La línea que une estas intersecciones es una aproximación poligonal de la parábola. En cada punto Li se cumple la condición de reflexión: un rayo vertical que incide en el espejo en Li se refleja en F.
Cuando la distancia entre dos puntos sucesivos Ci tiende a 0, la línea de puntos tiende a la parábola.



Anthemius de Tralles, arquitecto de « Santa Sofía »

La búsqueda del espejo de plata: resolver un problema de tangente inversa en la universidad.

La condición de reflexión puede reducirse a una ecuación diferencial. En la terminología del siglo XVII, se trata de resolver un problema de tangente inversa: conociendo la tangente en un punto cualquiera de una curva, encontrar la curva. Un primer cambio de variable reduce la ecuación diferencial a un problema de integración. Su solución implica la derivada de una función trigonométrica hiperbólica.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{f - y + \sqrt{(f-y))^2 + x^2}}$$

$$y(x) = f - xz(x)$$

$$z(x) = \frac{f - y(x)}{x}$$

$$x\frac{dz}{dx} = -\sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = -\frac{dx}{x}$$

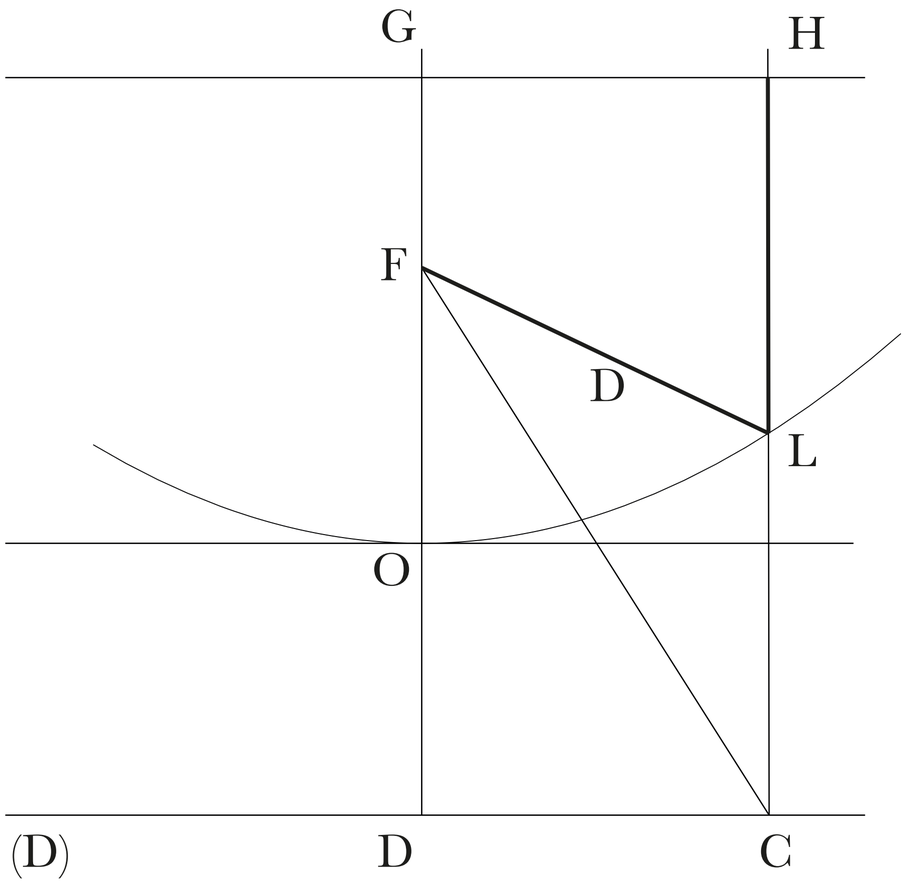
$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$z(x) = \sinh\left(-\log x + k\right)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(x) = \frac{x^2}{4f}$$

La definición de la parábola de Diocles y el principio de Fermat.



Para todo C, tenemos FL=LC. Damos una línea GH paralela a la línea (D). HL+LF representa el "camino óptico" según Fermat. Es constante en la parábola. Esta observación está en el origen de un instrumento para trazar la parábola de forma continua debido a Ibn Sahl.

$$HC = HL + LC = HL + LC$$

$$HC = GD = GO + OD = 2FO + GF$$

$$GF = h - f$$

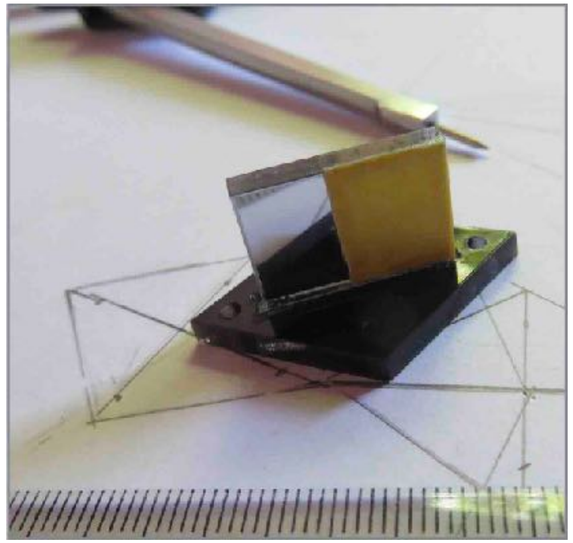
$$HL = h - y$$

$$FL = \sqrt{x^2 + (f-y)^2}$$

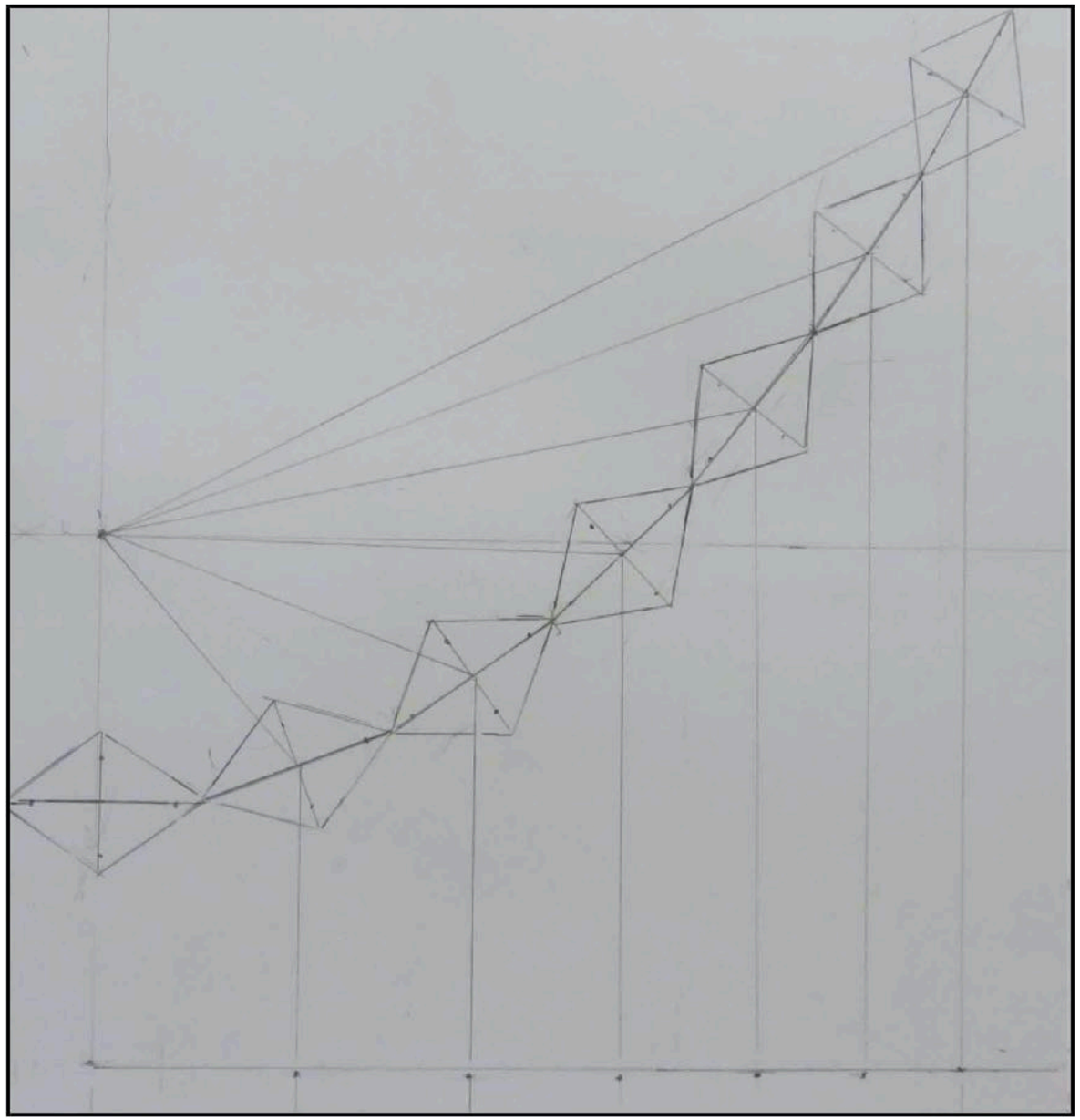
$$\sqrt{x^2 + (f-y)^2} + h - y = h + f$$

$$y = \frac{1}{4f}x^2$$

Comprobación experimental de la reflexión parabólica "con un compás y una regla



Un pequeño espejo está unido a un soporte en forma de diamante. Una fuente de luz rasante se coloca a gran distancia. Los espejos se colocan de tal manera que proporcionan la "condición de reflexión" en sus centros. Comprobamos que los centros de los espejos son equidistantes del punto focal y de una recta perpendicular a la dirección de la fuente, lo que sugiere la forma parabólica de la curva que buscamos



El experimento anterior es en cierto modo el descubrimiento de la ley de la reflexión. En efecto, el hecho de que la curva exacta sea una parábola, como sugiere el experimento, salvo errores experimentales, implica la igualdad de los ángulos durante la reflexión. Obsérvese también que la curva experimental está muy cerca de una parábola, a pesar del tamaño relativamente grande de los espejos. En el experimento, hemos optado por realizar la reflexión en el centro de la lozana. Esta elección evita cualquier construcción de compás y regla y corresponde a la solución numérica de la ecuación diferencial por un método implícito.

Cuando la fuente de luz se coloca a una distancia menor de los espejos, un análisis geométrico y experimental similar muestra que la curva es una elipse cuyos focos son la fuente de luz y el punto de concentración de la luz.

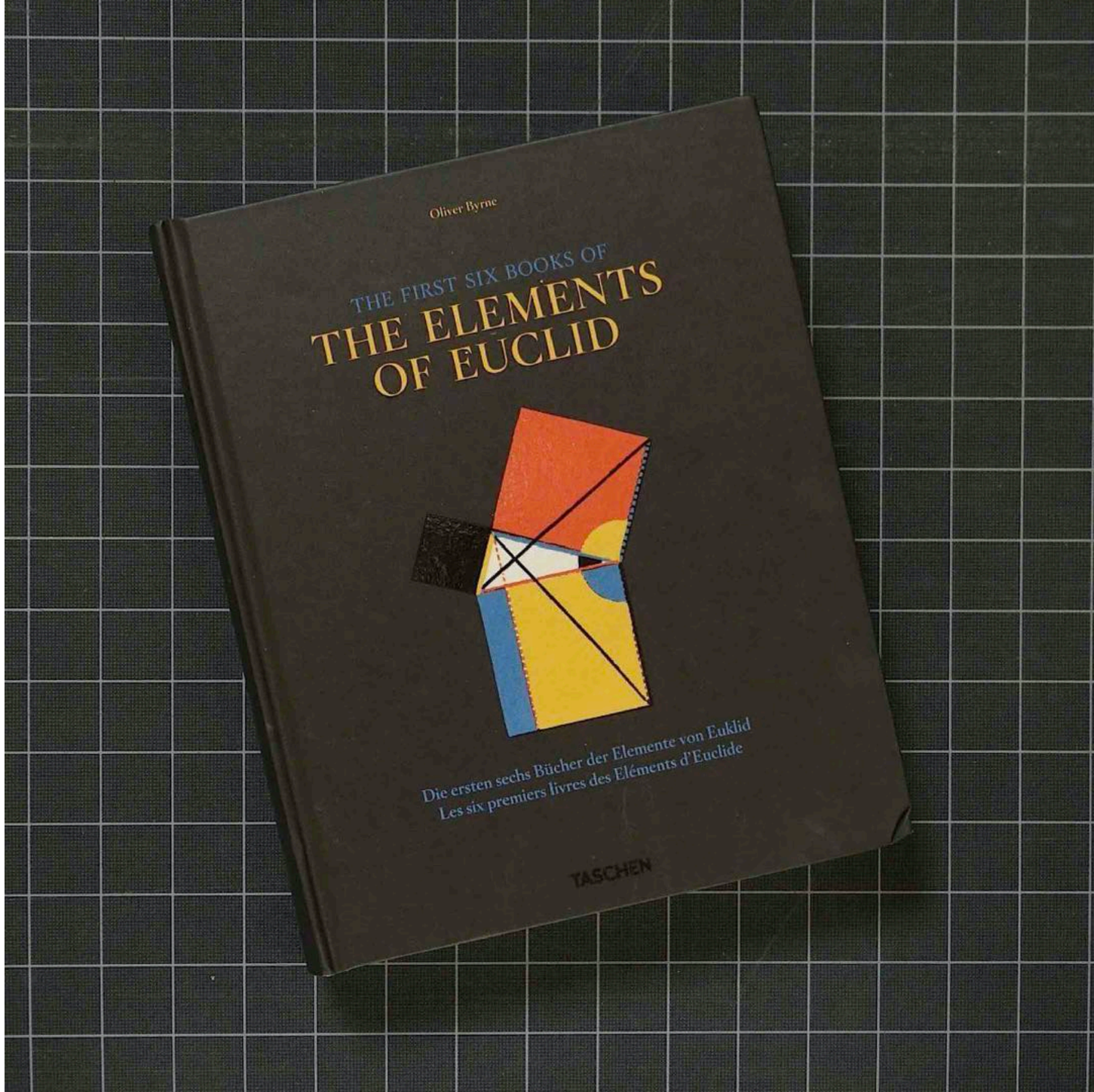
Lo mismo en el patio de recreo con una cuerda y una tiza

Empezamos eligiendo un objeto lejano a varios cientos de metros. Se coloca un espejo a unos metros del alumno en una posición fija, con el foco futuro F del espejo orientado hacia el alumno y el objeto lejano. La operación consiste inicialmente en girar el espejo hasta que la imagen del objeto lejano, vista por el alumno, se encuentre en el centro del espejo. A continuación, un alumno anota la posición del espejo en el suelo con tiza. A continuación, se desplaza el espejo para que su extremo izquierdo coincida con la huella del extremo derecho del primer espejo. A continuación, se gira el espejo alrededor de este punto hasta que el alumno enfocado vuelve a mirar el objeto lejano en el centro del espejo. Esto se repite varias veces. Utilizando la cuerda y la tiza, se puede demostrar que los centros de los espejos pertenecen a una parábola.

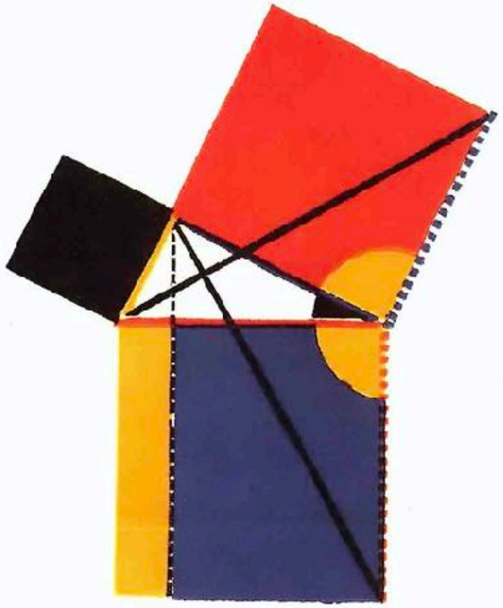


Oliver Byrne
(1847)

"Las demostraciones en los libros de Euclides se realizaban generalmente mediante palabras, letras y diagramas; pero como el uso de símbolos, signos y diagramas de colores en las artes y ciencias lineales hace que el proceso de razonamiento sea más preciso y la realización más rápida, se han adoptado en consecuencia en este caso." Oliver Byrne, 1847.



Demostración del teorema de Pitágoras (Euclides-Byrne)



IN *a right angled triangle*  *the ſquare on the hypotenuſe* ——— *is equal to the ſum of the ſquares of the ſides,* (——— *and* ———).

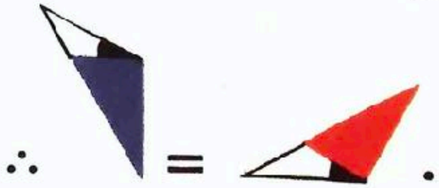
On ———, ——— and ——— deſcribe ſquares, (pr. 46.)

Draw ▪▪▪▪▪▪▪▪▪ ‖ ▪▪▪▪▪▪ (pr. 31.)
alſo draw ——— and ———.

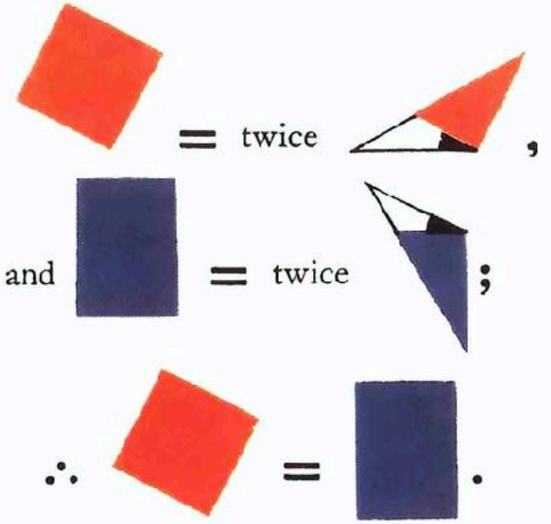


To each add  ∴ ,

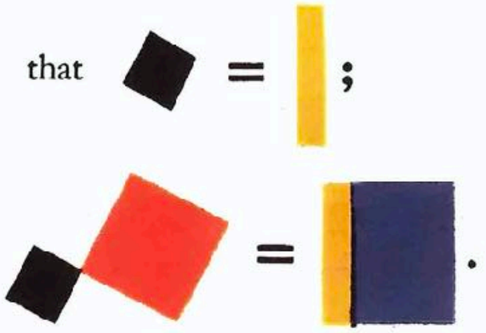
——— = ▪▪▪▪▪▪ and ——— = ▪▪▪▪▪▪▪▪▪;



Again, becauſe ——— ‖ ▪▪▪▪▪▪▪▪▪



In the ſame manner it may be ſhown



Q. E. D.

Vladimir Arnold (1937-2010)

Las matemáticas forman parte de la física. La física es una ciencia experimental que estudia el mundo que nos rodea. Forma parte de las ciencias naturales. Las matemáticas son la parte de la física para la que los experimentos son baratos.

Separadas de la física, y equiparadas a la escolástica, las matemáticas ya no servían para la enseñanza ni para su aplicación en otras ciencias. El resultado fue un odio generalizado hacia los matemáticos, tanto por parte de los desventurados estudiantes (algunos de los cuales llegaron a ser ministros) como de los usuarios.

Desgraciadamente, es esta fea y perversa construcción de las matemáticas la que ha dominado su enseñanza durante décadas. Nacida en Francia, esta perversión se extendió rápidamente a la enseñanza de las matemáticas elementales, primero a los estudiantes y luego a los alumnos de todos los niveles.

"Los espejos de Euclides" en el Museo de Arte Contemporáneo de Santiago de Chile.

Noviembre 2022 - Enero 2023





Roshdi Rashed



El Museo de Ciencias Árabes del Sultanato de Omán: Una colaboración con Roshdi Rashed, uno de los mayores historiadores de las ciencias matemáticas y físicas desde Grecia hasta el siglo XVII, pasando por el mundo árabe-musulmán



Un museo de Ciencias Arabes en el Sultanato de Omán



El espejo cóncavo del Museo de la Ciencia Árabe

IEA TIMSS & PIRLS International Study Center
BOSTON COLLEGE
Lynch School of Education

TIMSS 2019 (Trends in Mathematics and Science Study)

¡Francia y Chile a la cola de la clasificación "Trends in Mathematics and Science Studies" (TIMSS) en 2019!

Una educación de élite, ¡que conduce a una división cultural!

