Introduction

La naissance des mathématiques semble coïncider avec l'apparition de l'écriture. Toutes les grandes civilisations, de l'Hindus à la Mésopotamie en passant par l'Egypte ont développé indépendamment une culture mathématique. Issue d'une part de la modélisation des régularités que présentent certains phénomènes naturels comme par exemple le mouvement des étoiles dans la sphère céleste et d'autre part de la résolution de problèmes concrets comme par exemple le calcul des surfaces ou encore la répartition des héritages, les mathématiques apparaissent comme un élément de culture assez singulier par leur caractère universel.

C'est en Grèce, au VII ème siècle avant notre ère, qu'elles ont acquis leur caractère abstrait quasi définitif et que sont nées ce que l'on nomme aujourd'hui les mathématiques pures. Leur développement spectaculaire se trouve résumé dans les éléments d'Euclide qui date approximativement du III ème siècle avant notre ère. Les "éléments" sont le plus ancien écrit de mathématiques qui nous soit parvenu. Eudème de Rhodes, considéré comme le premier historien des sciences, élève d'Aristote nous a cependant laissé des pistes pour reconstituer l'histoire des mathématiques entre Thales (-620,-545) et Euclide (-300). Son histoire de la géométrie grecque ne nous est parvenu que très partiellement mais ont fait l'objet d'un ouvrage plus tardif du philosophe néoplatonicien du IV ème siècle de notre ère Proclus [Greek Geometry from Thales to Euclid, G. J. Allmann, Dublin University Press Series, 1889)]. C'est l'une des principales sources de l'histoire des mathématiques pendant la période Hellénique.

La physique comme tentative de démystifier les phénomènes naturels, nait à Milet, ancienne cité grecque d'Ionie avec trois philosophes : Thalès, Anaximandre et Anaximène. Ils développèrent une véritable philosophie de la nature en substituant aux explications mythologiques des arguments rationnels. Anaximandre (-610,-546), élève et successeur de Thales à l'Ecole de Milet a poussé cette démarche le plus loin [The First Scientist : Anaximander and His Legacy, C. Rovelli, Westholme Yardley, 2011] . Il a été le premier à consigner ses études dans un ouvrage qui ne nous ait malheureusement pas parvenu. C'est à Aristote et à ses commentateurs que l'on doit des éléments de la pensée d'Anaximandre.

C'est de la rencontre de cette philosophie de la nature avec les mathématiques qu'est née la physique moderne. Le premier ouvrage qui nous soit parvenu témoignant de cette rencontre est due une fois encore à Euclide. Dans un ouvrage dédié à "l'Optique" qui lui est attribué, il décrit la perpective d'un point de vue géométrique. Cette méthode puissante d'analyse des phénomènes naturels n'a cessé d'interroger les savants au cours des siècles. Ainsi Galilée écrivait il : "Le livre de la Nature est écrit en langage mathématique". Galilée est cependant loin d'avoir été le premier proposer une modélisation mathématique des phénomènes naturels, mais ses paroles reprises par de nombreux philosophes dont Kant, Husserl et Heideger ont contribué à créer le mythe Galilée inventeur de la mathématisation de la nature. Kepler s'interrogeant également sur l'efficacité des mathématiques écrivait : "Que peut saisir l'esprit humain à part les nombres et les grandeurs ?". Einstein, lui aussi, s'interrogeait : "Comment se fait-il que les mathématiques, qui sont un produit de la pensée humaine et sont indépendantes de toute expérience, puissent s'adapter d'une façon si

admirable aux objets de la réalité ?" puis "Ce qui est incompréhensible c'est que le monde soit compréhensible". Finalement c'est Richard Feymann, dans le sillage de Kepler qui est sans doute le plus proche de la vérité : "La physique est mathématique non parce que nous en savons beaucoup sur le monde physique mais au contraire parce que nous en savons fort peu. Seules les propriétés mathématiques du monde nous sont accessibles et la puissance de la physique vient précisément de ce qu'elle limite ses ambitions aux seules questions mathématisables".

La physique a suivi le développement des mathématiques. Essentiellement géométrique, pendant prés de 20 siècles d'Euclide à Newton, elle utilise largement le calcul différentiel à partir du XVIII ème siècle, ce qui lui permet d'aborder des problèmes plus complexes comme par exemple celui de la dynamique des fluides. La physique devient "Probabiliste" au milieu du XIX ème siècle avec l'avènement de la physique statistique qui permet de relier le comportement microscopique des atomes aux propriétés macroscopiques de la matière. Au début du XX ème siècle, la physique quantique utilise le formalisme abstrait des opérateurs. Simultanément, Einstein développe une théorie de la gravitation sur la base de la géométrie différentielle non-euclidienne. Enfin, depuis la fin de la seconde guerre mondiale, après les premiers calculs utilisés pour la fabrication de la bombe atomique, puis la course aux armements pendant la guerre froide, la simulation numérique s'est largement imposé dans la pratique des physiciens. L'intelligence artificielle a son tour pourrait bien quand a elle s'avérer être un outil d'analyse particulièrement efficace du monde réel et de sa complexité.

Notre objectif est de proposer un enseignement de la physique élémentaire dans sa période "géométrique" en s'appuyant sur son développement historique. Il s'agit de revenir sur les lois fondamentales de la nature découvertes pendant les vingts siècles qui séparent Euclide de Newton, en utilisant le langage géométrique des pères fondateurs. L'enseignement de la physique, au collège et au lycée, a largement perdu ses racines mathématiques, essentiellement dans le but d'en simplifier la transmission. Pourtant jusqu'au début du XIX ème siècle, il n'existe aucune véritable distinction entre un physicien et un mathématicien. Leonhard Euler en est un exemple particulièrement frappant. Par souci d'efficacité, les Physiciens ont remplacé dans leur enseignement, la modélisation géométrique des anciens par celle de l'analyse mathématique, la privant ainsi d'un enseignement élémentaire. C'est par conséquent à l'université que l'on revient sur la modélisation mathématique des phénomènes naturels, puisque c'est le moment ou l'on suppose que l'étudiant possède quelques éléments d'analyse. Revenir aux arguments géométrique des anciens, en les simplifiant si besoin, permet de retrouver la véritable nature de la physique au niveau du collège. Combien de ceux qui ont eu le courage de lire Newton dans le texte ont été frappé par l'absence de calcul différentiel dans ses "Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle", alors qu'il en est le co-inventeur avec Leibniz. Ce choix délibéré de Newton a longuement questionné les historiens de sciences. Chacun s'accorde aujourd'hui sur le fait que l'écriture des "Principia" en terme de calcul différentiel et intégral aurait été un obstacle à sa diffusion. Il a fallut en effet attendre le début du XVIII ème siècle pour que ce calcul soit définitivement accepté. D'un autre côté, Newton s'est profondément identifié aux géomètres Grecs, notamment à Apollonius, pour lesquels il vouait une admiration sans faille. Aujourd'hui la mécanique de Newton est enseignée via le calcul différentiel et intégral, ce qui constitue un obstacle

majeur à sa transmission. De façon analogue, l'enseignement de l'optique souffre des mêmes difficultés, notamment en ce qui concerne l'étude des miroirs et des lentilles. L'enseignement de la physique avant l'université est plutôt phénoménologique et souvent trop qualitatif, à l'exception de règles que l'on doit apprendre plutôt que comprendre. L'expérience y joue un rôle important mais en l'absence du cadre conceptuel mathématique, elle ne réussi pas toujours à convaincre les étudiants.

Les progrès spectaculaires de la Physique sont d'une part dues à l'efficacité de la modélisation mathématique des phénomènes naturels mais également au développement de la méthode expérimentale. Cette dernière, contrairement aux idées reçues est bien antérieure à Galilée. Bien qu'il n'en ait jamais fait part dans ses écrits, Archimède l'a très probablement utilisé, notamment dans sa découverte de la loi de la poussée des corps immergés. Ptolémée au I er siècle de notre ère a utilisé un dispositif expérimental qui lui a permis d'établir une loi de la réfraction qu'il a consigné dans ses fameuses tables. Ibn al Haytham au XI ème siècle a développé une série d'expériences cruciales afin d'établir les lois de l'optique. La méthode expérimentale est d'une part l'extension de l'observation pure du monde réel. A l'origine utilisant des dispositifs rudimentaires, cet aspect de la méthode expérimentale a acquis ses lettres de noblesse au XVII ème siècle, avec l'utilisation d'instruments plus sophistiqués comme par exemple la lunette avec Galilée et le microscope avec Robert Hooke. Mais l'expérimentation permet surtout de rapprocher un phénomène naturel de sa modélisation mathématique en le contraignant fortement. Cette idée mérite d'être expliquée plus en détail car elle jouera un rôle important dans cet ouvrage. Afin de la clarifier considérons deux exemples qui seront développés en détail.

L'arc en ciel est l'un des phénomènes naturels des plus remarquable [The Rainbow : From Myth to Mathematics, C.B. Boyer, Princeton University Press, 1987]. La concentration lumineuse colorée observée dessine un arc de cercle parfait. On a donc dans ce cas un contact direct avec la géométrie. De plus d'autres régularités sont observés. L'arc en ciel se manifeste toujours dans la direction opposée au soleil et l'angle apparent du cercle est toujours le même et approximativement égal à 42°. On observe très souvent un second arc séparé du premier par une bande plus sombre, la bande d'Alexandre. Ces deux arcs sont colorés et leurs couleurs, que l'on nomme souvent les couleurs de l'arc en ciel apparaissent toujours dans le même ordre. Cet ordre est inversé dans les deux arcs. Le premier modèle mathématique de ce phénomène est due à Aristote. Afin d'expliquer l'origine du cercle, Il suppose que le nuage de pluie se situe sur une sphère avec l'observateur en son centre et développe une théorie assez confuse faisant intervenir la réflexion de la lumière solaire sur le nuage sphérique. La circularité de l'arc est alors une conséquence de la sphéricité supposée du nuage de pluie. Le modèle d'Aristote a été accepté jusqu'à la fin du XIII ème siècle, lorsque al Farisi, savant Perse et Theodoric, savant Saxon, indépendamment, à l'aide d'une expérience, mettent en évidence indépendamment le véritable mécanisme de l'arc en ciel. Tous deux étudient le trajet de la lumière au travers d'une goutte de pluie qu'ils modélisent par une sphère. Dans une chambre noire, un rayon de lumière issu d'un petit orifice, se réfléchi d'une part sur la surface d'un récipient sphérique rempli d'eau, d'autre part pénètre à l'intérieur de celui ci en se réfractant, atteint sa face interne en se réfractant à l'extérieur. Une autre partie du rayon initial se réfléchi sur cette face interne

revenant dans la direction du rayon incident. Cette partie se réfracte à nouveau à la sortie du récipient, retournant ainsi dans la direction de la source lumineuse. Les deux savants étudient alors expérimentalement l'angle que fait le rayon incident et ce rayon émergeant et trouvent qu'il ne dépasse jamais un angle d'environ 42°. Ainsi tous les rayons frappant la sphère se trouvent ainsi réfractés, réfléchis et à nouveau réfracté à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet de 42° dont l'axe est celui la direction du soleil. L'observation de ce maximum de déviation est cruciale. Elle est à l'origine de l'arc-en-ciel. Malheureusement ni al Farisi et Theodoric n'iront plus loin dans l'analyse, ne possédant pas la loi de Snell de la réfraction. Trois siècles plus tard Descartes fera le calcul numérique de cet angle, Newton le calculera géométriquement en se donnant $n = \frac{3}{2}$ comme indice de réfraction de l'eau et finalement Spinoza en fera le premier calcul analytique. Cet exemple a fait l'objet d'une expérimentation au lycée. Il permet de montrer, comment une expérimentation, loin de l'observation directe du phénomène peut permettre de le réduire à une forme plus simple, plus directement accessible à sa modélisation mathématique. L'expérience de al Farisi et Théodoric permet de ramener l'étude de l'arc en ciel à celle, plus simple, de la recherche du maximum de la fonction représentant la déviation angulaire entre deux rayons lumineux.

Une autre expérience historique permet encore mieux d'illustrer la relation entre mathématique et expérimentation. Galilée, au début du XVI ème siècle, étudie la chute de corps. Il veut montrer expérimentalement que la vitesse d'un corps lâché sans vitesse initiale est proportionnelle au temps écoulé. Pour cela il "ralenti" artificiellement la chute en contraignant une boule a rouler sur un plan incliné. Il dispose des clochettes à des positions bien précise afin "d'écouter" la chute. Il place la première clochette à une distance arbitraire $d_1 = x_1 - x_0$ du point ou la boule est lâchée, puis il choisit les positions successives des clochettes x_i telles que $d_i = x_i - x_{i-1}$ soient dans le rapport des nombres impairs. Ainsi $d_2 = 3d_1$, $d_3 = 5d_1$, $d_4 = 7d_1$ ... $d_i = (2i-1)d_1$. Les intervalles de temps entre deux clochettes successives apparaissent égaux lors de la chute. L'expérience sera décrite en détail dans le chapitre de ce livre consacré au mouvement et a été reproduite avec des élèves au Lycée. De cette régularité observé lors de l'expérience, Galilée en déduit la loi de proportionnalité de la vitesse et du temps écoulé. Il s'appuie, sans la citer, de la règle de "Merton" donnée par des mathématiciens du collège Merton à Oxford au milieu du XIV ème siècle et d'une analyse du mouvement uniformément accéléré faite par Nicolas Oresme à la même époque [The History of the Calculus and its Conceptual Development, C.B. Boyer, Dover, 1959]. Nicolas Oresme montra en effet que les distances parcourues en temps égaux dans un mouvement uniformément accéléré sont dans la proportion des nombres impairs. Galilée connait très probablement le travail d'Oresme largement diffusé à l'époque mais n'en fait pas état. L'expérience de Galilée permet de mettre en évidence la nature de la chute des corps pesant. Il avait initialement pensé que la vitesse était proportionnelle à la distance parcourue. Cette expérience lui permettra de vérifier sa seconde hypothèse, celle d'un mouvement uniformément accéléré pour lequel la vitesse est proportionnelle au temps. Remplacer le mouvement de chute vertical par celui d'une boule roulant sur un plan incliné n'est pas innocent. L'inertie de la masse en chute libre est modifiée par celle du corps en rotation accélérée. Cependant cela n'altère pas la nature du mouvement accéléré

du centre de la boule, mais seulement la valeur de l'accélération de la gravité. Mais il faudra cependant attendre Huygens et Newton pour en faire l'analyse correcte.

Cet ouvrage est divisée en trois parties. La première partie concerne la science de la lumière, l'optique, la seconde celle des équilibres, la statique et la troisième celle du mouvement, la mécanique. De nombreuses expériences sont proposées dans chacun des chapitres. Certaines d'entre elles ont été réalisées par anciens, d'autres sont originales. L'une des caractéristiques de ces expériences est la simplicité de leur mise en oeuvre, l'absence d'appareils sophistiqués d'analyse et un traitement des résultats qui dans la plus part des cas ne nécessite que l'utilisation du compas et la règle. Chaque chapitre est éventuellement complété par une ou plusieurs annexes mathématiques. Dans une annexe commune au trois parties de l'ouvrage nous traitons de la théorie géométrique des courbes coniques, seules courbes utilisées par les mathématiciens pour décrire le réel d'Euclide à Newton. Ces courbes seront définies comme le lieu des points équidistants d'un point et d'un cercle ou d'une droite et non pas par leur expression algébrique. Cette définition se prête à de nombreuses constructions au "compas et à la règle", ce qui en facilitera l'apprentissage et rend caduque notamment l'objection qui consiste a affirmer qu'il est impossible d'enseigner la parabole au collège. L'expérience faite dans les collèges le confirme. De nombreuses ressources (codes Géogébra, codes Mathematica, simulations interactives sur iPad, vidéos, schéma précis des expériences, code 3D pour la fabrication de certains objets ...) seront disponibles sur un site dédié (http ://www.unmondegeometrique.com).

L'optique est divisés en cinq chapitres. Le premier traite de la perspective et s'appuie sur "l'Optique" d'Euclide. Dans le second nous étudions la réflexion de la lumière au travers des travaux de Diocles en ce qui concerne le miroir parabolique et ceux d'Anthemius de Tralles pour le miroir elliptique. Le troisième chapitre concerne la loi de la réfraction, de sa découverte au X ème siècle par Ibn Sahl à Snell en passant par Kepler, Harriot et Descartes. Le quatrième chapitre traite des miroirs courbes, notamment du miroir concave en s'appuyant sur les travaux de Ibn al Haytham du XI ème siècle. Enfin le dernier chapitre est consacré à l'Arc-en-Ciel avec notamment la reproduction des expériences faites par Théodoric et al Farisi au XIV ème siècle.

La statique est divisée en trois chapitres. Le premier traite de la question des centres de gravité en suivant le texte d'Archimède sur "L'équilibre des figures planes" et notamment l'étude du centre de gravité d'un secteur parabolique. Le second est consacré à la statique des fluides en suivant le travail d'Archimède sur les corps flottant et notamment son analyse de la stabilité des corps flottants qui apparait comme le premier calcul de bifurcation et est considéré comme le travail fondateur de la stabilité des navires. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la chainette, telle que l'a faite Stevin au XVI ème siècle.

La mécanique est divisée en trois chapitres. Dans le premier nous étudions du point de vue géométrique et expérimental la chute des corps pesant en nous appuyant sur les travaux de Galilée dans ce domaine. Le second chapitre est consacré à l'étude des mouvements pendulaires en suivant Huygens et Hooke. Enfin dans le dernier chapitre nous étudierons les lois du mouvement et les illustrerons par les expérience de Hooke et la théorie géométrique de Newton des orbites planétaires.