Introducción

El nacimiento de las matemáticas parece coincidir con la aparición de la escritura.Todas las grandes civilizaciones, desde la India hasta Mesopotamia y Egipto, han desarrollado independientemente una cultura matemática. Por un lado, a partir de la modelización de las regularidades de ciertos fenómenos naturales, como el movimiento de los astros en la esfera celeste, y por otro lado, a partir de la resolución de problemas concretos, como el cálculo de superficies o el reparto de herencias, las matemáticas aparecen como un elemento de cultura bastante singular por su carácter universal.

Fue en Grecia, en el siglo VII a.C., donde adquirieron su carácter abstracto casi definitivo y donde nació lo que hoy llamamos matemáticas puras. Su espectacular desarrollo se resume en los Elementos de Euclides, que datan aproximadamente del siglo III a.C. Los "Elementos" son el escrito matemático más antiguo que se conserva. Eudemo de Rodas, considerado el primer historiador de la ciencia y alumno de Aristóteles, nos ha dejado sin embargo algunas pistas para reconstruir la historia de las matemáticas entre Tales de Mileto (620-545 a.C.) y Euclides (300 a.C.). Su historia de la geometría griega sólo ha sobrevivido parcialmente, pero fue objeto de una obra posterior del filósofo neoplatónico del siglo IV Proclus [Greek Geometry from Thales to Euclid, G. J. Allmann, Dublin University Press Series, 1889]. Es una de las principales fuentes para la historia de las matemáticas durante el periodo helénico.

La física, como intento de desmitificar los fenómenos naturales, nació en Mileto, una antigua ciudad griega de Jonia, con tres filósofos : Tales, Anaximandro y Anaxímenes. Desarrollaron una verdadera filosofía de la naturaleza sustituyendo las explicaciones mitológicas por argumentos racionales. Anaximandro (610-546 a.C.), alumno y sucesor de Tales en la Escuela de Mileto, fue el que más lejos llegó en este sentido [The First Scientist : Anaximander and His Legacy, C. Rovelli, Westholme Yardley, 2011]. Fue el primero en dejar constancia de sus estudios en una obra que desgraciadamente no ha sobrevivido. Es a Aristóteles y a sus comentaristas a quienes debemos elementos del pensamiento de Anaximandro.

Del encuentro de esta filosofía de la naturaleza con las matemáticas nació la física moderna. La primera obra que se conserva y que atestigua este encuentro se debe, una vez más, a Euclides. En una obra dedicada a la "Óptica", que se le atribuye, describe la perspectiva desde un punto de vista geométrico. Este poderoso método de análisis de los fenómenos naturales ha asido cuestionado por los científicos a lo largo de los siglos. Así escribió Galileo : "El libro de la Naturaleza es escrito en lenguaje matemático". Galileo no fue ni mucho menos el primero en proponer una modelización matemática de los fenómenos naturales, pero sus palabras fueron retomadas por muchos filósofos, entre ellos Kant, Husserl y Heideger, que contribuyeron a crear el mito de Galileo como inventor de la matematización de la naturaleza. Kepler, cuestionando también la eficacia de las matemáticas, escribió : "¿Qué puede captar la mente humana sino números y magnitudes ? También Einstein se preguntaba : "¿Cómo es posible que las matemáticas, que son un producto del pensamiento humano y son independientes de toda experiencia, puedan adaptarse de forma tan admirable a los objetos de la realidad ?" y luego "Lo incomprensible es que el mundo sea comprensible. Por

último, es Richard Feymann, en la estela de Kepler, quien probablemente esté más cerca de la verdad : "La física es matemática no porque sepamos mucho sobre el mundo físico, sino porque sabemos muy poco. Sólo las propiedades matemáticas del mundo son accesibles para nosotros, y el poder de la física proviene precisamente del hecho de que limita sus ambiciones a cuestiones matemáticamente tratables.

La física ha seguido el desarrollo de las matemáticas. Esencialmente geométrica, durante casi 20 siglos, desde Euclides hasta Newton, utilizó ampliamente el cálculo diferencial a partir del siglo XVIII, lo que le permitió abordar problemas más complejos, como la dinámica de los fluidos. La física se volvió "probabilística" a mediados del siglo XIX con la llegada de la física estadística, que permitió relacionar el comportamiento microscópico de los átomos con las propiedades macroscópicas de la materia. A principios del siglo XX, la física cuántica utilizaba el formalismo abstracto de los operadores. Al mismo tiempo, Einstein desarrolló una teoría de la gravitación basada en la geometría diferencial no euclidiana. Por último, desde el final de la Segunda Guerra Mundial, tras los primeros cálculos utilizados para la fabricación de la bomba atómica, y luego la carrera armamentística durante la Guerra Fría, la simulación digital ha sido ampliamente utilizada por los físicos. La inteligencia artificial, por su parte, podría resultar una herramienta especialmente eficaz para analizar el mundo real y su complejidad.

Nuestro objetivo es proponer una enseñanza de la física elemental en su periodo "geométrico", basada en su desarrollo histórico. El objetivo es volver a las leyes fundamentales de la naturaleza descubiertas durante los veinte siglos que median entre Euclides y Newton, utilizando el lenguaje geométrico de los padres fundadores. La enseñanza de la física en la escuela secundaria ha perdido en gran medida sus raíces matemáticas, principalmente para simplificar su transmisión. Sin embargo, hasta principios del siglo XIX no existía una distinción real entre un físico y un matemático. Leonhard Euler es un ejemplo especialmente llamativo. En aras de la eficacia, los físicos sustituyeron en su enseñanza el modelado geométrico de los antiguos por el análisis matemático, privándolo así de una educación elemental. Es, por tanto, en la universidad donde se vuelve a la modelización matemática de los fenómenos naturales, ya que es el momento en que se supone que el alumno tiene algunos elementos de análisis. Volver a los argumentos geométricos de los antiguos, simplificándolos si es necesario, permite redescubrir la verdadera naturaleza de la física a nivel universitario. A cuántos de los que han tenido el valor de leer a Newton en el texto les ha llamado la atención la ausencia del cálculo diferencial en sus "Principios matemáticos de la filosofía natural", a pesar de ser el coinventor con Leibniz. Esta elección deliberada de Newton ha sido cuestionada durante mucho tiempo por los historiadores de la ciencia. Todo el mundo está de acuerdo hoy en día en que escribir los "Principia" en términos de cálculo diferencial e integral habría sido un obstáculo para su difusión. De hecho, hasta principios del siglo XVIII no se aceptó definitivamente este cálculo. Por otra parte, Newton estaba profundamente identificado con los geómetras griegos, en particular con Apolonio, por quien sentía una admiración indefectible. Hoy en día, la mecánica de Newton se enseña mediante el cálculo diferencial e integral, lo que supone un gran obstáculo para su transmisión. Del mismo modo, la enseñanza de la óptica adolece de las mismas dificultades, especialmente en lo que respecta al estudio de los espejos y las lentes. La enseñanza de la física antes de

la universidad es más bien fenomenológica y a menudo demasiado cualitativa, con la excepción de las reglas que hay que aprender más que comprender. La experiencia desempeña un papel importante, pero en ausencia de un marco conceptual matemático, no siempre convence a los alumnos.

El espectacular progreso de la física se debe, por un lado, a la eficacia de la modelización matemática de los fenómenos naturales, pero también al desarrollo del método experimental. Este último, en contra de la creencia popular, es anterior a Galileo. Aunque nunca la mencionó en sus escritos, es muy probable que Arquímedes la utilizara, sobre todo en su descubrimiento de la ley de flotación de los cuerpos sumergidos. En el siglo I d.C., Ptolomeo utilizó un dispositivo experimental que le permitió establecer una ley de refracción, que registró en sus famosas tablas. En el siglo XI, Ibn al Haytham desarrolló una serie de experimentos cruciales para establecer las leyes de la óptica. El método experimental es, por un lado, una extensión de la pura observación del mundo real. Este aspecto del método experimental, que en un principio utilizaba dispositivos rudimentarios, adquirió sus cartas de nobleza en el siglo XVII, con el uso de instrumentos más sofisticados, como el telescopio con Galileo y el microscopio con Robert Hooke. Pero la experimentación permite, sobre todo, acercar un fenómeno natural a su modelo matemático, restringiéndolo fuertemente. Esta idea merece ser explicada con más detalle, ya que jugará un papel importante en este libro. Para aclararlo, consideremos dos ejemplos que se desarrollarán en detalle.

El arco iris es uno de los fenómenos naturales más notables [The Rainbow : From Myth to Mathematics, C.B. Boyer, Princeton University Press, 1987]. La concentración de luz de color observada dibuja un arco de círculo perfecto. En este caso tenemos un contacto directo con la geometría. Además, se observan otras regularidades. El arco iris aparece siempre en la dirección opuesta al sol y el ángulo aparente del círculo es siempre el mismo y aproximadamente igual a 42°. Muy a menudo se observa un segundo arco, separado del primero por una banda más oscura, la banda Alexander. Estos dos arcos están coloreados y sus colores, a menudo llamados los colores del arco iris, aparecen siempre en el mismo orden. Este orden se invierte en ambos arcos. El primer modelo matemático de este fenómeno se debe a Aristóteles. Para explicar el origen del círculo, supuso que la nube de lluvia estaba situada en una esfera con el observador en su centro y desarrolló una teoría bastante confusa que implicaba el reflejo de la luz solar en la nube. el reflejo de la luz solar en la nube esférica. La circularidad del arco es entonces una consecuencia de la supuesta esfericidad de la nube de lluvia. El modelo de Aristóteles fue aceptado hasta finales del siglo XIII, cuando al Farisi, un erudito persa, y Teodorico, un erudito sajón, demostraron de forma independiente el verdadero mecanismo del arco iris mediante un experimento. Ambos estudiaron la trayectoria de la luz a través de una gota de lluvia, que modelaron en una esfera. En una habitación oscura, un rayo de luz procedente de un pequeño orificio se refleja en la superficie de un recipiente esférico lleno de agua, y luego penetra en el interior del recipiente por refracción, llegando a su superficie interior por refracción exterior. Otra parte del rayo inicial se refleja en esta cara interna volviendo en la dirección del rayo incidente. Esta parte se refracta de nuevo a la salida del contenedor, volviendo así en la dirección de la fuente de luz. A continuación, los dos científicos estudiaron experimentalmente el ángulo formado por el rayo incidente y este rayo emergente y comprobaron que nunca supera un

ángulo de unos 42°. Así, todos los rayos que inciden en la esfera se refractan, se reflejan y se vuelven a refractar en el interior de un cono de medio ángulo en la parte superior de 42° cuyo eje es el de la dirección del sol. La observación de esta desviación máxima es crucial. Es el origen del arco iris. Por desgracia, ni al Farisi ni a Teodorico fueron más allá en el análisis, ya que no poseían la ley de refracción de Snell. Tres siglos más tarde Descartes calculó numéricamente este ángulo, Newton lo calculó geométricamente dándose $n = \frac{3}{2}$ como índice de refracción del agua y finalmente Spinoza hizo el primer cálculo analítico. Este ejemplo fue objeto de un experimento en el instituto. Muestra cómo un experimento, lejos de la observación directa del fenómeno, puede reducirlo a una forma más simple, más directamente accesible a su modelización matemática. El experimento de al Farisi y Theodoric permite reducir el estudio del arco iris al estudio más sencillo del máximo de la función que representa la desviación angular entre dos rayos de luz.

La relación entre las matemáticas y la experimentación se ilustra mejor con otro experimento histórico. Galileo, a principios del siglo XVI, estudió la caída de los cuerpos. Quería demostrar experimentalmente que la velocidad de un cuerpo que se deja caer sin ninguna velocidad inicial es proporcional al tiempo transcurrido. Para ello, "ralentizó" artificialmente la caída obligando a una bola a rodar por un plano inclinado. Colocaba las campanas en posiciones muy precisas para "escuchar" la caída. Coloca la primera campana a una distancia arbitraria $d_1 = x_1 - x_0$ del punto donde se suelta la bola, luego elige las posiciones sucesivas de las campanas x_i tales que $d_i = x_i - x_{i-1}$ estén en la relación de los números impares Así, $d_2 = 3d_1$, $d_3 = 5d_1$, $d_4 = 7d_1$ ... $d_i = (2i-1)d_1$. Los intervalos de tiempo entre dos campanadas sucesivas parecen ser iguales durante la caída. El experimento se describe con detalle en el capítulo de este libro dedicado al movimiento y se reprodujo con los alumnos del Liceo. De esta regularidad observada en el experimento, Galileo dedujo la ley de proporcionalidad de la velocidad y el tiempo transcurrido. Se basó, pero no citó, la "regla de Merton" dada por los matemáticos del Merton College de Oxford a mediados del siglo XIV y un análisis del movimiento uniformemente acelerado realizado por Nicolas Oresme en la misma época [The History of the Calculus and its Conceptual Development, C.B. Boyer, Dover, 1959]. Nicolas Oresme demostró que las distancias recorridas en tiempos iguales en un movimiento uniformemente acelerado están en la proporción de los números impares. Es probable que Galileo conociera el trabajo de Oresme, que era ampliamente conocido en la época, pero no lo mencionó. El experimento de Galileo permitió demostrar la naturaleza de la caída de los cuerpos pesados. Al principio había pensado que la velocidad era proporcional a la distancia recorrida. Este experimento le permitió verificar su segunda hipótesis, la de un movimiento uniformemente acelerado para el que la velocidad es proporcional al tiempo. Sustituir el movimiento de caída vertical por el de una bola rodando por un plano inclinado no es inocente. La inercia de la masa que cae se ve modificada por la inercia del cuerpo giratorio acelerado. Sin embargo, esto no altera la naturaleza del movimiento acelerado del centro de la bola, sino sólo el valor de la aceleración de la gravedad. Sin embargo, no fue hasta Huygens y Newton que se hizo el análisis correcto.

Este libro está dividido en tres partes. La primera parte trata de la ciencia de la luz, la óptica, la segunda de la ciencia del equilibrio, la estática, y la tercera de la ciencia del movimiento, la mecánica. En cada uno de los capítulos se proponen numerosos experimentos.

Algunas de ellas se han realizado en el pasado, otras son originales. Una de las características de estos experimentos es la sencillez de su realización, la ausencia de dispositivos de análisis sofisticados y un tratamiento de los resultados que en la mayoría de los casos sólo requiere el uso del compás y la regla. Cada capítulo se completa finalmente con uno o varios apéndices matemáticos. En un apéndice común a las tres partes del libro se aborda la teoría geométrica de las curvas cónicas, las únicas curvas utilizadas por los matemáticos para describir la realidad desde Euclides hasta Newton. Estas curvas se definirán como el lugar de los puntos que equidistan de un punto y una circunferencia o una recta y no por su expresión algebraica. Esta definición se presta a numerosas construcciones con "compás y regla", lo que facilitará el aprendizaje y dejará obsoleta la objeción de que es imposible enseñar la parábola en la enseñanza secundaria. La experiencia en los centros de enseñanza secundaria lo confirma. Numerosos recursos (códigos de Geogebra, códigos de Mathematica, simulaciones interactivas en el iPad, vídeos, diagramas precisos de los experimentos, código 3D para la fabricación de ciertos objetos, etc.) estarán disponibles en un sitio dedicado (http ://www.unmondegeometrique.com).

La óptica se divide en cinco capítulos. La primera trata de la perspectiva y se basa en la "Óptica" de Euclides. En la segunda estudiamos la reflexión de la luz a través de los trabajos de Diocles sobre el espejo parabólico y los de Anthemius de Tralles sobre el espejo elíptico. El tercer capítulo trata de la ley de la refracción, desde su descubrimiento en el siglo X por Ibn Sahl hasta Snell, pasando por Kepler, Harriot y Descartes. El cuarto capítulo trata de los espejos curvos, en particular el espejo cóncavo, basado en la obra de Ibn al Haytham en el siglo XI. Finalmente, el último capítulo está dedicado al Arc-en-Ciel, incluyendo la reproducción de los experimentos realizados por Teodorico y al Farisi en el siglo XIV.

La estática se divide en tres capítulos. El primero aborda la cuestión de los centros de gravedad siguiendo el texto de Arquímedes sobre "El equilibrio de las figuras planas" y, en particular, el estudio del centro de gravedad de un sector parabólico. El segundo capítulo está dedicado a la estática de los fluidos, siguiendo los trabajos de Arquímedes sobre los cuerpos flotantes y, en particular, su análisis de la estabilidad de los cuerpos flotantes, que aparece como el primer cálculo de bifurcación y se considera la obra fundadora de la estabilidad de los buques. El tercer capítulo está dedicado al estudio de la cadena, tal y como la realizó Stevin en el siglo XVI.

La mecánica se divide en tres capítulos. En la primera estudiamos desde el punto de vista geométrico y experimental la caída de los cuerpos pesados, basándonos en los trabajos de Galileo en este campo. El segundo capítulo está dedicado al estudio del movimiento pendular siguiendo a Huygens y Hooke. Finalmente, en el último capítulo estudiaremos las leyes del movimiento y las ilustraremos con los experimentos de Hooke y la teoría geométrica de las órbitas planetarias de Newton.